



**UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA INGENIERÍA CIVIL**



**“APOYO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE
LA ASIGNATURA DE ESTRUCTURAS ESPECIALES.”**

“TEXTO GUÍA”

Trabajo Dirigido, Por Adscripción, Para Optar Al Diploma Académico De Licenciatura En
Ingeniería Civil.

**Presentado por: JAVIER LIENDO LÓPEZ
RONALD MARCELO SOLIZ MARTÍNEZ**

Tutor: Ing. Oscar Florero Ortuño

COCHABAMBA – BOLIVIA

Marzo, 2007

DEDICATORIA

*A nuestros padres,
por enseñarnos que los valores y el trabajo honesto
es posible aún en nuestros tiempos.*

AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento especial al Ing. Oscar Florero Ortuño a su ayuda incondicional en el desarrollo del presente Proyecto.

A los docentes y compañeros de la Carrera, por la enseñanza brindada.

A las personas que permitieron culminar esta parte de nuestras aspiraciones.

FICHA RESUMEN

El presente Trabajo de Adscripción pretende mejorar los métodos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Estructuras Especiales de la carrera de Ingeniería Civil, a través de la implementación de cinco instrumentos de modernización académica, con las que el estudiante pueda adquirir conocimiento y un mejor aprovechamiento bajo supervisión del Docente. Estos instrumentos son:

A. Un Texto Guía, desarrollado en un formato que permite al estudiante una lectura sencilla y un mejor entendimiento; presenta un lenguaje adecuado al nivel de formación del estudiante de décimo semestre. Es un instrumento académico y didáctico que contiene: temas adaptables para la modelación y diseño de estructuras, incluyendo ejemplos.

B. Guía de Proyectos, con el fin de mejorar el aprovechamiento del estudiante, se presentan cinco guías de elaboración de proyectos comprendidos en el plan global de la materia, incluyendo un manual de los programas de simulación empleados para el desarrollo de los mismos; edificios altos, puente colgante, puente atirantado, cúpula y presa relacionados con los temas elaborados en el Texto Guía.

D. Un texto desarrollado expresamente para uso del docente de la materia, con el fin de hacer didácticas las clases, donde el alumno pueda participar y aportar con ideas. Se presentan diapositivas de los capítulos y material didáctico que apoya la guía de proyectos en formato de video. El texto docente, contiene el plan global de la materia de manera que el docente organice óptimamente el desarrollo del temario.

C. Página Web de la asignatura, alojada en la red de la Facultad de Ciencias y Tecnología (Intranet), este instrumento es aplicado como medio de comunicación y como herramienta para construir conocimiento.

E. Se presenta un CD, el cual contiene todo el trabajo de Adscripción anteriormente mencionado.

ÍNDICE GENERAL

	Pág
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS.....	iii
FICHA RESUMEN	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
 CAPITULO 1 ANÁLISIS MATRICIAL, ESTÁTICO Y DINÁMICO DE ESTRUCTURAS	 1
1.1. ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS.....	1
1.1.1. Tipos De Estructuras Reticuladas.	3
1.1.2. Consideraciones en los Apoyos.	6
1.1.3. Condiciones Para aceptar Un Comportamiento Lineal De Estructura.	7
1.1.4. Análisis Del Efecto <i>P-Delta</i>	11
1.2. ANÁLISIS ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS.	15
1.3. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS.	16
1.3.1. Pasos En El Análisis Dinámico.....	17
1.3.3. Modelo Matemático De Un Grado De Libertad.....	17
1.3.4. Principio De D’Alambert.	19
1.3.5. Combinación Modal.....	20
1.3.6. Time History.	21
 CAPITULO 2 EDIFICIOS ALTOS	 24
2.1. INTRODUCCIÓN.....	24
2.2. CRITERIOS DE USO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO EN EDIFICIOS ALTOS.	25
2.3. MODELOS DE ANÁLISIS.....	29
2.4. PARTICULARIDADES DEL MODELO TRIDIMENSIONAL.	34
2.4.1. Trechos Rígidos De Extremidad De Elemento Estructural.....	34
2.4.2. Esbeltez.....	35
2.5. EL VIENTO Y EL MOVIMIENTO EN EDIFICIOS ALTOS_CONFORT HUMANO.	36
 CAPITULO 3 EQUILIBRIO DE HILOS Y CABLES.....	 39
3.1. INTRODUCCIÓN.....	39
3.2. CASO CABLES TENSOS.	42
a) Cuando Los Extremos A y B Están En El Mismo Nivel.	42
b) Cuando Los Extremos A y B No Están En El Mismo Nivel.-	44
3.3. CASO CABLES POCO TENSOS.....	45
3.4. EJERCICIOS.....	47
3.5. VARIACIONES DE PESO Y TEMPERATURA.	56
 CAPITULO 4 PUENTES.....	 61
4.1. INTRODUCCIÓN.....	61
4.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE DISEÑO.	62
4.3. FILOSOFÍA DE SEGURIDAD.....	62
4.4. SOLICITACIONES EN LOS PUENTES.....	65
4.5. MODELACIÓN ESTRUCTURAL.....	66
4.6. PUENTES DE HORMIGÓN ARMADO.....	67
4.7. PUENTES DE HORMIGÓN PRETENSADO.....	68

4.7.1. Sistemas de Preesforzado.....	69
4.7.2. Tipos de Sección.....	69
4.7.3. Perdidas de Pretensado.....	70
4.8. PUENTES CON DOVELAS.....	74
4.8.1. Puentes con Volados sucesivos.....	76
4.8.2. Altura de arranque del volado y secciones transversales típicas.....	77
4.8.3. Cargas sobre la subestructura.....	78
4.8.4. Perfil típico de cables post-tensados.....	78
4.9. PUENTES ARCO.....	79
4.9.1. Comparaciones de Puentes Arco con otros tipos de puentes.....	80
4.9.2. Tipos de Puente Arco.....	81
4.9.3. Análisis de los puentes arco.....	82
4.10. PUENTES COLGANTES.....	84
4.10.1. Sistema estructural.....	86
4.10.2. Tipos de Puentes Colgantes.....	87
4.10.3. Diseño.....	88
4.11. PUENTES ATIRANTADOS.....	94
4.11.1. Configuración.....	95
4.11.2. Cables.....	97
4.11.3. Viga.....	98
4.11.4. Torres.....	98
4.11.5. Diseño.....	99
4.12. ANÁLISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE PUENTE.....	100
4.12.1. Clasificación de análisis y lineamiento general.....	101
4.12.2. Formulación de la no linealidad geométrica.....	104
4.12.3. Formulación de no linealidad del comportamiento del material.....	108
4.13. EFECTO DEL IMPACTO DE VEHÍCULOS EN MOVIMIENTO.....	108
4.13.1. Consideraciones del efecto de Impacto en el diseño de puentes de carreteras.....	110
4.14. EFECTOS DE VIENTO SOBRE PUENTES DE GRANDES VANOS.....	111
4.14.1. Vientos y puentes de gran luz.....	111
4.14.2. Aeroelasticidad.....	112
4.14.3. Metodologías para el estudio de fenómenos Aeroelásticos.....	114
a.- Metodología Experimental.....	114
b.- Metodología Computacional.....	115
c.- Metodología Híbrida.....	115
CAPITULO 5. TEORIA MEMBRANAL DE LAS CÁSCARAS.....	116
5.1. COMPORTAMIENTO Y TEORIAS COMUNES DE CÁSCARAS.....	116
5.1.2. ACCIÓN DE RESISTENCIA DE CARGA DE UNA CÁSCARA.....	119
5.1.3. Geometría de las Cáscaras de Revolución.....	123
5.1.4. Cáscaras de Revolución Simétricamente Cargadas.....	124
5.1.5. Casos típicos de Cáscaras de Revolución.....	127
5.1.6. Deformación Axial Simétrica.....	140
5.1.7. Cáscaras de Revolución Cargadas Asimétricamente.....	143
5.1.8. Cáscara de Revolución Bajo Carga de Viento.....	145
5.1.9. Cáscaras Cilíndricas de Forma General.....	148
5.1.10. Roturas de Acción Elástica en Cáscaras.....	152

CAPITULO 6 TEORIA GENERAL O DE FLEXION EN CÁSCARAS	156
6.1. INTRODUCCIÓN	156
6.2. RESULTANTES DE TENSION DE CÁSCARAS	156
6.3. RELACIONES DE FUERZA MOMENTO Y DESPLAZAMIENTO	158
6.4. COMPONENTES DE TENSION EN UNA CÁSCARA	161
6.5. ENERGIA DE DEFORMACION EN LA FLEXIÓN Y ALARGAMIENTOS DE CÁSCARAS	162
6.6. CÁSCARAS CILÍNDRICAS CIRCULARES CARGADAS AXISIMETRICAMENTE	163
6.7. CASO TÍPICO DE UNA CÁSCARA CILÍNDRICA CARGADA AXISIMETRICAMENTE	167
6.8. CÁSCARAS DE REVOLUCION BAJO CARGAS AXISIMETRICAS	171
6.9. ECUACIONES GOBERNANTES PARA DESPLAZAMIENTOS AXISIMETRICOS	174
6.10. TANQUES CILINDRICOS	177
6.10. COMPARACIONES DE TENSIONES FLECCIONANTES Y MEMBRANALES	181
6.11. REPRESENTACIONES DE ELEMENTOS FINITOS DE CÁSCARAS DE FORMA GENERAL	183
6.12. SOLUCION DE CÁSCARAS CARGADAS AXISIMETRICAMENTE CON ELEMENTOS FINITOS	184
 CAPITULO 7 MALLAS ESPACIALES	 189
7.1. INTRODUCCIÓN	189
7.2. CÁLCULO DE MALLAS POR ASIMILACIÓN A ESTRUCTURAS CONTINUAS	190
7.2.1. Mallas Tetraedricas	191
7.2.2. Proceso De Cálculo	192
7.2.3. Determinación, de las tracciones y compresiones en las barras de la malla en función de los esfuerzos de lámina	193
7.2.4. Deformaciones que los esfuerzos de tracción y compresión en las barras producen en la malla	205
7.2.5. Factores de corrección en las barras de las capas superior e inferior en el caso de cubiertas planas rectangulares con carga uniforme	212
7.2.6. Esfuerzos finales en las barras de una placa plana rectangular sometida a carga uniforme	214
7.2.7. Mallas formadas por pirámides de base cuadrada y triangulada	215
7.2.8. Mallas formadas por pirámides de base cuadrada, placas planas	227
7.2.9. Mallas de una sola capa con triángulos equiláteros	232
7.2.10. Mallas de una sola capa con triángulos isósceles	235
7.3. CONSIDERACIONES GENERALES EN MALLAS	238
7.3.1. Pandeo	238
7.3.2. Enlaces	238
7.3.3. Reacciones	239
7.3.4. Campo de aplicación del cálculo por asimilación a estructuras continuas	239
7.3.5. Deformaciones	239
 ANEXOS	
ANEXO A GUÍA DE PROYECTO EDIFICIOS ALTOS	241
ANEXO B GUÍA DE PROYECTO PUENTE COLGANTE	258
ANEXO C GUÍA DE PROYECTO PUENTE ATIRANTADO	276
ANEXO D GUÍA DE PROYECTO PRESA	291
ANEXO E GUÍA DE PROYECTO CÚPULA	327
 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 354

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Pórticos planos	4
Figura 1.2. Tipos de apoyo (simbología).....	7
Figura 1.3. Componentes de una viga en voladizo sometida a una fuerza F	8
Figura 1.4. Componentes de un elemento sometido a flexión y fuerza axial.....	9
Figura 1.5 Iteracción flexión - fuerza axial.....	10
Figura 1.6 Iteracción flexión - fuerza axial (linealidad geométrica y física).....	11
Figura 1.7 Representación de hipótesis de pequeños desplazamientos.....	11
Figura 1.8 Ilustración del efecto P-delta.....	13
Figura 1.9 Diagramas de momentos con influencia del efecto P-delta.	13
Figura 1.10 Cargas actuando en el elemento cable.	14
Figura 1.13. Modelo matemático para un sistema de un grado de libertad no amortiguad.	18
Figura 1.17. Fuerzas externas e Inerciales.	19
Figura 2.1. Torre Taipei 101.	25
Figura 2.2. Concepción estructural en función del Número de Pisos.	26
Figura 2.3. Representación en planta en función del Número de Pisos.	27
Figura 2.4. Modos de Deformación.....	28
Figura 2.5.- Edificio siete de septiembre: torsión del último piso.....	29
Figura 2.6.- Grados de libertad al nivel de cada losa.....	33
Figura 2. 7.- Desplazamiento lateral de piso.	34
Figura 2.8.-Efecto de la deformación de columna pared.	35
Figura 2.9.- Esbeltez de un edificio.	35
Figura 2.10.- Niveles de vibración y grados de confort.	37
Figura 3.2.- Tracción en los cables debido a los esfuerzos que actúan.	41
Figura 3.3.- Esquema de un cable.	42
Figura 3.4.- Cable con extremos en un mismo nivel.	42
Figura 3.5.- Cable con extremos a diferente nivel.	44
Figura 3.6.- Cable poco tenso.	46
Figura 4.1. Puente Akashi Kaiko.....	61
Figura 4.2 Separación de cargas y resistencias	63
Figura 4.3 Tren de cargas tipo SH 20-44.....	65
Figura 4.4 Eje tandem	65
Figura 4.5 Puente modelado con vigas	66
Figura 4.6 Puente modelado con elementos finitos	66
Figura 4.7 Puente con vigas cajón de concreto.....	66
Figura 4.8 Secciones típicas de puentes de hormigón armado.....	67
Figura 4.9 Modelo de pérdidas de pretensado a partir del anclaje	70
Figura 4.10 Construcción de volados sucesivos.....	76
Figura 4.11 Sección transversal típica de una viga cajón de altura variable (vano 93m).....	77
Figura 4.12 Perfil de tendones post-tensionados internos	79
Figura 4.13 Nomenclatura de un arco	80
Figura 4.14 Arco de Concreto	80
Figura 4.15 Puente arco de acero con pendolones verticales	81
Figura 4.16 Puente arco con pendolones inclinados	81
Figura 4.17 Cable horizontal conectando a los pendolones	82
Figura 4.18 Coeficiente de Pandeo	83
Figura 4.19 Fotografía del primer puente Tacoma Narrows	85
Figura 4.20 Tipos de puentes Colgantes	87
Figura 4.21 Tipos de vigas rigidizantes	87
Figura 4.22 Tipos de pendolones	88
Figura 4.23 Tipos de anclaje	88
Figura 4.24 Fuerzas y deformaciones en un puente colgante	89

Figura 4.25 Relación Deflexión – Carga entre teorías	90
Figura 4.26 Modelo analítico de la torre principal.....	91
Figura 4.27 Estabilizador Aerodinámico	94
Figura 4. 28 Concepto de funcionamiento de un puente atirantado	94
Figura 4. 29 Fuerzas de Cable en relación de la carga sobre la viga	96
Figura 4.30 configuración de cables	97
Figura 4.31 Cable inclinado.....	97
Figura 4.32 Cables cruzados en la torre	99
Figura 4.33 curvas de cargas–desplazamiento lateral de un pórtico.....	101
Figura 6.34. Efecto de segundo orden.....	102
Figura 4.35. Grados de libertad y fuerzas nodales para un elemento unidimensional en el plano	105
Figura 4.36. Generación y desprendimiento de vértices de Von Kármán.	113
Figura 4.37. Oscilaciones verticales en un tablero de puente debido al desprendimiento de torbellinos.	113
Figura 4.38. Modificaciones típicas aerodinámicas	114
Figura 5.1.- Relación espesor radio	116
Figura 5.2.- a y b dependencia del equilibrio de las fuerzas membranales	118
Figura 5.3.- a y b equilibrio de las fuerzas membranales con cargas concentradas	118
Figura 5.4.- Deformación de flexión	119
Figura 5.5.- Cáscara esférica sometida a una presión P	120
Figura 5.6.- Cáscara de revolución.....	123
Figura 5.7.- a, b y c cortes de cáscara de revolución.....	124
Figura 5.8.- Cáscara cónica.....	128
Figura 5.9 Domo de media esfera	130
Figura 5.10 Cono truncado	133
Figura 5.11 Domo de sección circular	135
Figura 5.12 Membrana media elipsoide.....	136
Figura 5.13 Cáscara cónica sujeta a presión.....	137
Figura 5.14 Tanque esférico.....	139
Figura 5.15 Deformación axial simétrica	140
Figura 5.16 Componentes cáscara cargada asimétricamente.....	143
Figura 5.17 Carga de viento actuando sobre domo	145
Figura 5.18 Cono circular.....	147
Figura 5.19 Componentes cáscara cilíndrica.....	148
Figura 5.20 Cilindro apoyado	150
Figura 5.21 Presión actuante cáscara cilíndrica	153
Figura 6.1 Componente infinitesimal de una cáscara	157
Figura 6.2 Deformación de elemento cáscara.....	159
Figura 6.3 Componentes de equilibrio	163
Figura 6.4 Cilindro infinito sujeto a una carga P	167
Figura 6.5 Cilindro infinito sujeto a Carga distribuida	170
Figura 6.6 Componentes cáscara cargada axisimetricamente.....	172
Figura 6.7 Variación de curvatura de una cáscara.....	175
Figura 6.8 Tanque cilíndrico de espesor uniforme.....	177
Figura 6.9 Relación deformación desplazamiento	184
Figura 7.1.- Parque Biológico (Madrid).	190

CAPITULO 1

ANÁLISIS MATRICIAL, ESTÁTICO Y DINÁMICO DE ESTRUCTURAS

1.1. ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS.

El objetivo del análisis de estructuras reticulares es; dadas las características geométricas y mecánicas de una estructura, sus condiciones de apoyo y las acciones que le solicitan, determinar los desplazamientos de todos los puntos y los esfuerzos internos.

Las acciones solicitantes pueden ser directas, estas son fuerzas (cargas) o pueden ser indirectas (deformaciones impuestas). Los esfuerzos internos son las tensiones y en el caso de estructuras reticuladas, los esfuerzos internos solicitantes (esfuerzos normales, momentos flectores, esfuerzos cortantes, momentos de torsión).

Las deformaciones impuestas pueden ser desplazamientos impuestos (tales como descenso de apoyo) que ocasionan cambio de forma, o deformación específicas debidas a variación de temperatura, retracción, etc. Las acciones pueden ser permanentes o variables con respecto al tiempo, siendo que estas se clasifican como estáticas o mejor (“seudo-estáticas”) o dinámicas. Las aceleraciones, fuerza de inercia y energía cinética son muy pequeños y no se consideran en el análisis, en el caso de acciones “seudo-estáticas”. Muchas veces ciertas acciones dinámicas son tratadas de modo simplificado como si fuesen “seudo-estáticas” y el error cometido es corregido de modo aproximado por la aplicación de un ***coeficiente de impacto***. Un análisis estructural puede ser estático o dinámico y también lineal o no-lineal.

Por lo anterior mencionado, en un análisis lineal se admite un comportamiento aproximadamente lineal de la estructura, caracterizado por la proporcionalidad entre causas (acciones) y efectos (desplazamientos y esfuerzos internos). El conjunto de estos efectos se llama una respuesta de la estructura a las acciones que la solicitan.

Un análisis Dinámico puede ser determinística o aleatoria. Por ejemplo, cuando se hace un análisis simplificado de una estructura *offshore* se admite que es solicitado por una onda monocromática con una altura y periodo definidos, ese análisis es llamado “determinística”. Si se considera que la estructura es solicitada por un “estado de mar” mucho más complejo, definido por parámetros estadísticos (altura de onda “significativa”, periodo medio “espectro” asociado con un análisis de Fourier), el análisis es llamado “aleatorio”.

Las estructuras reticuladas son estructuras constituidas por elementos tipo barra, esto es por piezas alargadas, con una dimensión preponderante. Estas piezas pueden ser de eje recto o curvo, y de sección transversal constante o variable.

En el caso de que habría dos direcciones preponderantes, la estructura es clasificado como laminar (placas, laminas y cáscaras).

Las placas y láminas son planas, siendo que en las placas actúan cargas perpendiculares a su plano y en las láminas las cargas están situadas en su propio plano medio.

Cuando todas las dimensiones son de una misma orden de grandeza, la estructura es clasificada como *tridimensional* (bloques).

La antigua designación “pieza lineal” para las barras y “estructura lineal” para las estructuras compuestas de barras, a entrado en desuso, para que no haya confusión entre “lineal” con el sentido de “una dimensión preponderante” y “comportamiento lineal”, caso bien diferente.

El análisis matricial de estructuras tiene como objetivo un *análisis estático, lineal, de estructuras reticuladas*.

En análisis estático lineal de *estructuras laminares y tridimensionales* es hecha por “métodos numéricos”, el método de los “*elementos finitos*”.

Un análisis dinámico o un análisis no-lineal tanto de estas estructuras, como las estructuras reticuladas, puede también ser hecha por el método de los elementos finitos.

En casos especiales pueden ser obtenidos soluciones analíticas o cerradas, aplicando teorías clasificadas como “rigurosas” o “clásicas” sin embargo muchas veces apenas aproximadas, en estos casos; se evita de adoptar los métodos numéricos que son siempre aproximados.

Las estructuras de comportamiento lineal son aquellas en que siendo los *efectos* (respuesta) proporcionales a las *causas* (solicitaciones), es verificado el *principio de superposición de los efectos*.

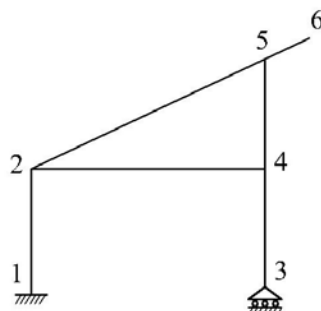
En un análisis lineal se parte de la hipótesis de que el comportamiento de la estructura es lineal. En realidad un comportamiento lineal es un comportamiento-limite, para el cual el comportamiento de la estructura cuando los desplazamientos y las deformaciones específicas tienden a cero. La gran mayoría de los análisis estructurales hechas corrientemente en ingeniería civil son del tipo lineal y los errores cometidos al hacer esa aproximación son poco significativos, en estos casos. Posteriormente serán estudiados las causas de no linealidad y las condiciones para que pueda ser admitida un comportamiento lineal.

1.1.1. Tipos De Estructuras Reticuladas.

Una estructura reticulada es idealizada como una asociación de *elementos* o “miembros”, que son las *barras*, representadas por sus ejes. Los *nudos* de estructuras son considerados como puntos, despreciando las *perturbaciones locales* existentes en las dos extremidades de cada barra y las cercanías de las cargas concentradas. Es así considerada válida en toda la estructura, la hipótesis de secciones planas (Navier-Bernoulli). Gracias a esta hipótesis los *esfuerzos internos* considerados son los esfuerzos “seccionales” (esfuerzos normales, momentos flectores, esfuerzos cortantes, momentos de torsión). Conocidos estos parámetros, pueden ser fácilmente calculadas las tensiones, en cualquier punto de la sección transversal.

Los desplazamientos considerados son los *desplazamientos lineales* de los puntos del *eje* de la barra y las *rotaciones de las secciones transversales*. Desplazamientos lineales y rotaciones que son “*Desplazamientos angulares*”, son llamados *desplazamientos generalizados*.

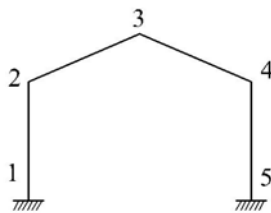
Las acciones directas que actúan sobre la estructura y también los esfuerzos internos solicitantes, son acciones fuerzas “**generalizados**” ya que pueden ser fuerzas o “momentos”. Normalmente el punto en que concurren los ejes de dos o más barras es llamado **nudo**. Esta noción de nudo es entonces generalizado, designándose también como nudo la extremidad libre de una pieza en “voladizo” y también la extremidad de una barra vinculada a un apoyo. A parte de esto se pueden crear, cuando fuera conveniente, nudos llamados “ficticios”, dividiendo una misma barra en dos o más elementos.



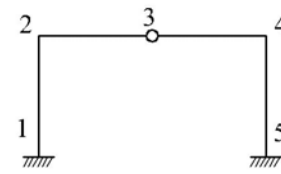
a) 6 nudos; 7 elementos



b) 4 nudos; 3 elementos.



c) 5 nudos; 4 elementos



d) 5 nudos; 4 elementos

Figura 1.1. Pórticos planos

En el caso de un nudo “ficticio” al cual concurren dos barras cuyos ejes se sitúan en una misma recta. En la *Figura 1.1d*, el nudo 3 es “ficticio”. Debiendo tener cuidado; el nudo ficticio 3 no es rotula sino que mas bien tiene continuidad en ese punto, el mismo pórtico es representado en la *Figura 1.1b*, sin ese nudo.

Las estructuras reticulares son los siguientes tipos:

Planas:

- 1.- Celosía Plana (nudos articulados, cargas en el plano).
- 2.- Pórtico Plano (cargas en el plano).

3.- Emparrillado (cargas normales al plano)

Espaciales:

4.- Celosía Espacial (nudos articulados).

5.- Pórtico Espacial.

Las vigas continuas son tratadas, conforme la conveniencia como pórticos planos o emparrillados (si todas las cargas actúan normalmente a la viga en un mismo plano, como emparrillado; si hay cargas oblicuas o efectos de temperatura, como pórtico plano). A no ser cuando existe impedimento opuesto por un apoyo, los nudos pueden desplazarse en varias direcciones o girar. Esta claro que para imponer un cierto desplazamiento o rotación a un nudo es preciso aplicar una fuerza o momento en ese nudo. Aunque exista resistencia al desplazamiento por parte de la estructura, ese desplazamiento es posible solamente un apoyo rígido torna un desplazamiento imposible. Es muy importante observar que las longitudes de las barras no son invariables, como muchas veces se admite a titulo de simplificación en el cálculo “manual” (En programas de análisis de estructuras de Edificios Altos; muchas veces se considera a las losas de piso como “Diafragmas Rígidos”). En consecuencia del esfuerzo normal, las longitudes de las barras pueden variar. El nudo 2 de la estructura de la *Figura 1.1a*, por ejemplo puede desplazarse tanto en la dirección horizontal, como también en la dirección vertical, dando lugar en este caso, a un acortamiento de la columna que une a los nudos 1 y 2, los desplazamientos de los nudos 2 y 5 en la dirección horizontal pueden ser diferentes, correspondiendo esa diferencia al alargamiento o acortamiento de la viga que une los nudos 2 y 5. El nudo 2 también puede girar entorno a un eje normal al plano de la figura. Se puede ver así que cada nudo de una estructura de pórtico plano puede presentar 2 desplazamientos lineales en dos direcciones ortogonales correspondientes al sistema de referencia adoptada y una rotación o desplazamiento angular, en torno de un eje perpendicular al plano de la figura. En un pórtico plano existe 3 desplazamientos posibles o “gados de libertad” por nudo, excepto en la direcciones en que esos desplazamientos fueran impedidos por apoyos.

En celosía plana se consideran apenas dos desplazamientos lineales por nudo en el plano. Como los nudos son articulados, sus rotaciones no son consideradas, pues ningún efecto

tendría sobre la estructura. No tiene sentido hablar de rotaciones de nudos en una celosía. Los esfuerzos Internos considerados en las celosías son en general apenas los esfuerzos normales de tracción y compresión.

En Pórticos planos se consideran dos desplazamientos lineales, en el plano y una rotación en torno del eje normal al plano como “grados de libertad” de los nudos. Los esfuerzos internos son esfuerzos normales, momentos flectores en torno al eje de la sección normal al plano, los esfuerzos cortantes en la dirección del eje de la sección contenida en el plano.

En los emparrillados se consideran por nudo un desplazamiento lineal perpendicular al plano y dos rotaciones en torno de dos ejes ortogonales contenidos en el plano. Los esfuerzos internos son momentos flectores en torno de su eje de sección de su eje de sección contenido en un plano, momentos de torsión (en torno al eje de la pieza) y esfuerzos cortantes en la dirección del eje de la sección normal a su plano. No se consideran esfuerzos normales.

En las celosías espaciales se consideran por nudo tres desplazamientos lineales en tres direcciones ortogonales correspondientes al sistema de referencia adoptado. En general los esfuerzos solicitantes considerados son apenas los esfuerzos normales.

En los pórticos espaciales se consideran por nudo, tres desplazamientos lineales y tres rotaciones, correspondiente a los tres ejes del sistema de referencia adoptado. Los esfuerzos internos son esfuerzos normales, momentos flectores según los dos ejes de sección. Se puede apreciar de esta forma que las estructuras del tipo 1 presentadas en la clasificación de tipos de estructuras reticulares, tienen dos grados de libertad por nudo, los tipos 2, 3 y 4 tres grados de libertad y los del tipo 5, seis grados de libertad.

1.1.2. Consideraciones en los Apoyos.

En los apoyos algunos en la totalidad o la totalidad de los grados de libertad son impedidos. Tales apoyos son “*apoyos rígidos*”. Apoyos elásticos, funcionando como resortes, no suprimen grados de libertad y no son clasificados como apoyos. Cada grado de libertad suprimido es considerado como **1 apoyo**. Por ejemplo un empotramiento perfecto en pórtico plano es considerado como 3 apoyos, que impiden respectivamente 2

desplazamientos lineales y una rotación. Una articulación simple corresponde a dos apoyos que impiden 2 desplazamientos lineales. Una articulación móvil, corresponde apenas a un apoyo que impide 1 desplazamiento lineal. En la *Figura 1.2* las flechas corresponden a las direcciones de esas reacciones de apoyos (direcciones impedidas).

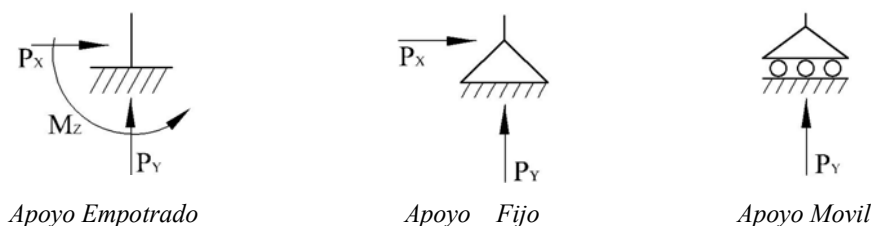


Figura 1.2. Tipos de apoyo (simbología)

Así como una estructura es referida a un sistema “global” de ejes cartesianos, la automatización de las operaciones interactivamente en el programa de computador exige que cada *elemento-barra* sea inicialmente analizado en un “sistema de referencia local”, cuyo *eje x* es el eje propio del elemento. Posteriormente los resultados de ese análisis de cada elemento son convertidos para el “sistema global de la estructura”, por medio de *rotación de ejes*, afin de que esta pueda ser analizada como un todo.

1.1.3. Condiciones Para aceptar Un Comportamiento Lineal De Estructura.

Tres pueden ser las causas de un “comportamiento no-lineal”. Estando centradas en sus características geométricas y Físicas de la estructura.

Condiciones Geométricas:

- 1.- Influencia en el cambio de configuración en la formulación de las ecuaciones de equilibrio.
- 2.- No linealidad de las relaciones deformaciones específicas-desplazamientos.

Condiciones Físicas:

- 3.- No linealidad de las relaciones tensiones-deformaciones específicas.

Las condiciones para que pueda ser admitido un comportamiento lineal son correspondientemente.

- 1.- Pequeños desplazamientos.
- 2.- Pequeñas deformaciones específicas.
- 3.- Material obedeciendo la “ley de Hooke”.

A continuación se ejemplifica las causas geométricas y físicas para un comportamiento no-lineal.

1.1.3.1. Influencia del cambio de configuración en la formulación de las ecuaciones de equilibrio.

a) Viga En Voladizo.-

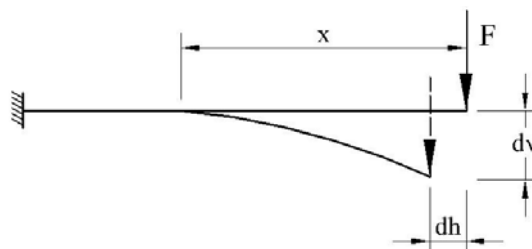


Figura 1.3. Componentes de una viga en voladizo sometida a una fuerza F

El momento flector en una sección distante X de la extremidad libre (antes del cambio de configuración) será:

$$M = -F \cdot x$$

Después del cambio:

$$M = -F \cdot (x - dh)$$

Pues esa distancia horizontal pasa a ser $x - dh$. Para si la fuerza vertical dv fuera pequeña en relación al vano L , dh podrá ser despreciado como “efecto de 2do Orden”. De hecho dh puede ser calculado aproximadamente por la formula.

$$\frac{dh}{L} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{dv}{L} \right)^2 \quad (1.1)$$

Si dv fuera por ejemplo $1/1000$, dh será del orden de $(1/1000.000)$. Entonces, para pequeños desplazamientos dv :

$$M \cong -F \cdot x \quad (1.2)$$

b) Interacción Entre Flexión y Fuerza Axial.-

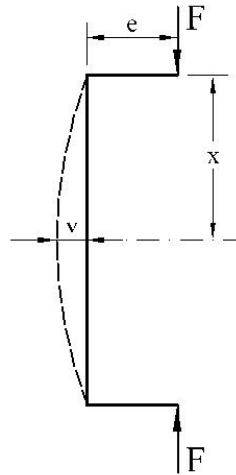


Figura 1.4. Componentes de un elemento sometido a flexión y fuerza axial

Donde:

$$M = F(e - v)$$

Si v fuera pequeño con respecto de e :

$$M \approx F.e \quad \text{para.} \quad v \ll e$$

En el primer caso el comportamiento no es lineal, como se sabe de la teoría de flexión compuesta de piezas esbeltas de la resistencia de los materiales (formula “de la secante” y en el caso extremo $e = 0$, teoría de pandeo de Euler).

1.1.3.2. No-Linealidad De Las Relaciones Deformaciones Específicas Desplazamientos.

Tenemos como ejemplo la interacción flexión-fuerza axial. En la teoría usualmente expuesto en resistencia de materiales se admite una formula aproximada para la curvatura, que es lineal (pero de 2do Orden).

$$K = \frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{si } v \rightarrow \alpha.v; \text{ también } K \rightarrow \alpha.K) \quad (1.3)$$

Para la formula exacta en tanto, no es lineal, pues contiene derivadas elevadas o exponentes diferentes de la unidad.

$$K = \frac{1}{r} \approx \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{si } v \rightarrow \alpha.v ; K \neq \alpha.K) \quad (1.4)$$

Una teoría más rigurosa, en el que adopta la formula exacta de curvatura, conduce a resultados diferentes de la anterior, inclusive en la teoría de pandeo desaparece la solución de “equilibrio indiferente” para $P = P_{cr. Euler}$.

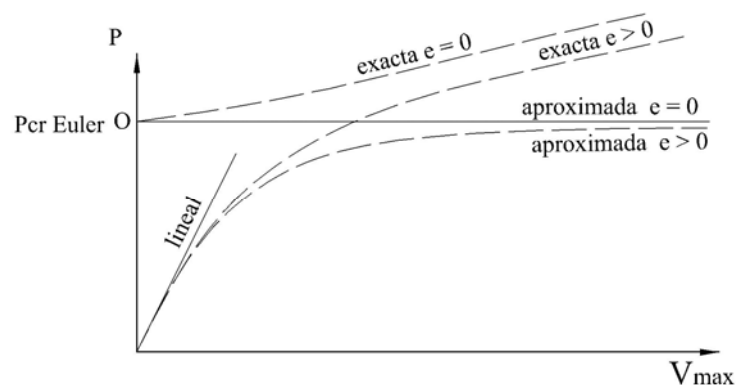


Figura 1.5 Iteración flexión - fuerza axial

La “bifurcación” en el punto o es “equilibrio inestable-equilibrio estable” en vez de “equilibrio inestable-equilibrio indiferente”.

La solución aproximada (teoría de 2do orden de flexión compuesta, expuesta en la Resistencia de Materiales, solo es aceptable para pequeños valores de.

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

1.1.3.3. No-Linealidad De Las Relaciones Tensiones-Deformaciones Específicas.

Esta causa de no linealidad evita el comportamiento, como por ejemplo el material no sigue la ley de *Hooke*.

Todavía en el caso de flexión compuesta, considerando tanto una linealidad *geométrica*, como *física* se tendría.

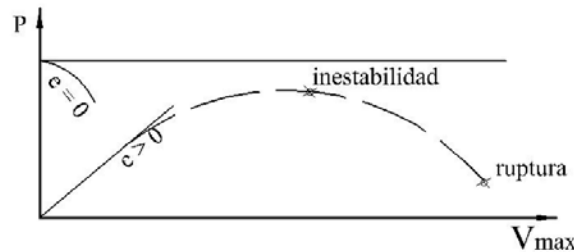
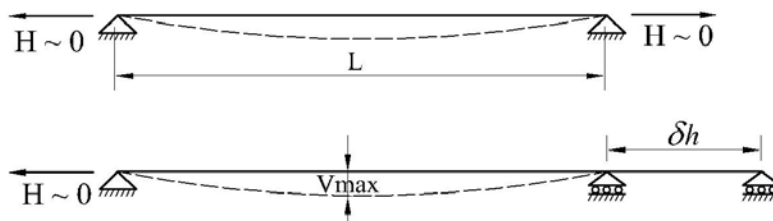


Figura 1.6 Iteración flexión - fuerza axial (linealidad geométrica y física)

Una consecuencia importante de esta hipótesis de *pequeños desplazamientos* es que se desprecian los llamados “*efectos membranales*” en barras flexionadas cuyas extremidades no pueden aproximarse.



Donde δh ,
es de segundo orden
cuando $V_{max} \ll L$.

Figura 1.7 Representación de hipótesis de pequeños desplazamientos

1.1.4. Análisis Del Efecto *P-Delta*.

El efecto *P-Delta* es analizado para todos los elementos reticulares, ya sea en el análisis estático, dinámico o de puentes.

El análisis *P-Delta* es el efecto de una sobre carga axial sobre el comportamiento de la flexión transversal de los elementos reticulares. La compresión axial reduce la rigidez de flexión de los elementos reticulares y la tracción axial rigidiza estos elementos. Este es un tipo de no-linealidad geométrica conocida como el efecto *P-Delta*. Se aclara que el análisis *P-Delta* no incluye los efectos de grandes deformaciones expuestos anteriormente.

Este análisis es particularmente usado para considerar los efectos de las cargas de gravedad sobre la rigidez lateral de edificios, como es requerido por algunos códigos de diseño como el ACI-1995. Pero el uso más adecuado es para el uso de cable, como cubiertas colgantes, puentes colgantes, puentes atirantados, torres rigidizados por cables, etc.

El efecto *P-Delta* esencialmente modifica las características de la estructura, afectando los resultados de los análisis incluyendo cargas estáticas, modos de vibración, análisis espectral, líneas de influencia en puentes, cargas móviles, combinaciones de cargas.

El análisis del efecto *P-Delta* es una Opción que proporciona una poderosa y flexible forma de conocer el comportamiento de edificios, puentes y otras estructuras. Pero es necesario entender los fundamentos y las restricciones para su uso, se resumen las siguientes condiciones.

- El efecto *P-Delta* se analiza solamente en los elementos reticulares. Pero otros tipos de elementos pueden estar presentes en el modelo.
- Solamente el efecto de una gran deformación de una fuerza axial sobre la flexión transversal y deformación en modo cortante es considerado.
- Todas las deflecciones, desplazamientos lineales y relaciones se asumen que cumplen con la teoría de pequeñas deformaciones.
- La forma de la deformación transversal de un elemento reticular se asume que es cúbico en flexión y lineal en corte entre los tramos rígidos.
- Las cargas axiales del *P-Delta* son asumidos constantes a lo largo de la longitud del elemento.

Es importante recomendar que inicialmente se debe hacer un análisis lineal del modelo a fin de comparar y corregir cuando se usa el análisis *P-Delta*.

1.1.4.1. Bases Teóricas Del Efecto *P-Delta*.

El efecto *P-Delta* se refiere específicamente a una no-linealidad geométrica como efecto de una gran tensión o compresión, tensionando directamente sobre el comportamiento de la flexión transversal y corte.

El concepto básico del efecto *P-Delta* vamos a ilustrar con el siguiente ejemplo.

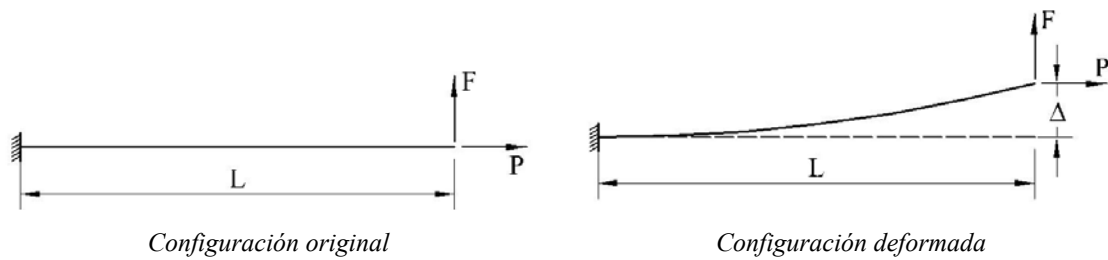


Figura 1.8 Ilustración del efecto P-delta.

El equilibrio de la configuración original lineal es.

$$M = F \cdot L$$

En lugar del anterior análisis, consideremos el equilibrio de la configuración deformada, tenemos un momento adicional causado por la fuerza axial P actuando sobre un desplazamiento transversal Δ . El momento es entonces.

$$M = F \cdot L - P \cdot \Delta \quad (1.5)$$

Pero también podrían ocurrir, casos más desfavorables. En el siguiente gráfico se muestran los diagramas de momentos.

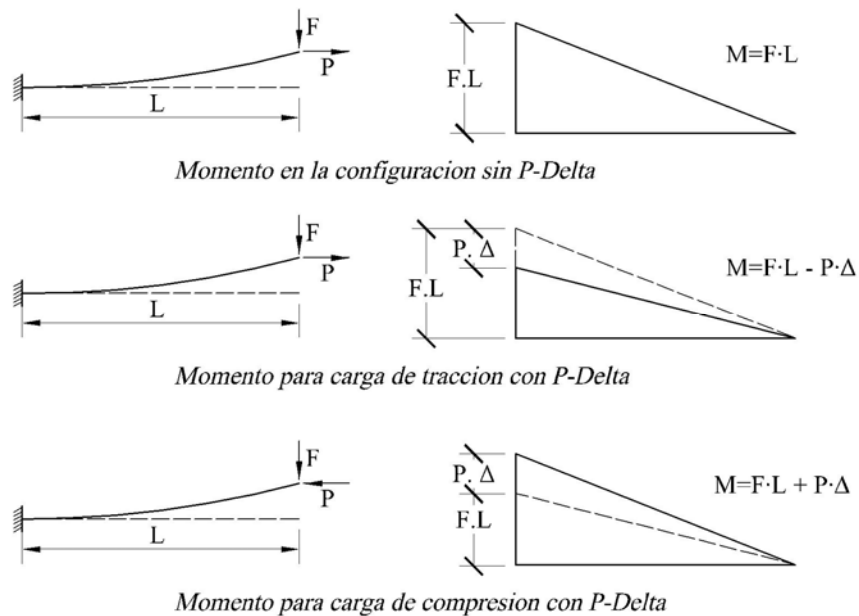


Figura 1.9 Diagramas de momentos con influencia del efecto P-delta.

Es importante señalar que todas las deformaciones son asumidos como siendo pequeños. El efecto P-Delta no captura algún cambio en la rigidez axial del miembro, tales como los que ocurren después del pandeo. Para tener esta valoración se requiere la consideración de grandes deformaciones.

1.1.4.2. Matriz Geométrica y El Efecto *P-Delta*.

La fundamentación de la ecuación para la matriz geométrica para un cable es muy simple de deducir. Consideremos la siguiente figura.

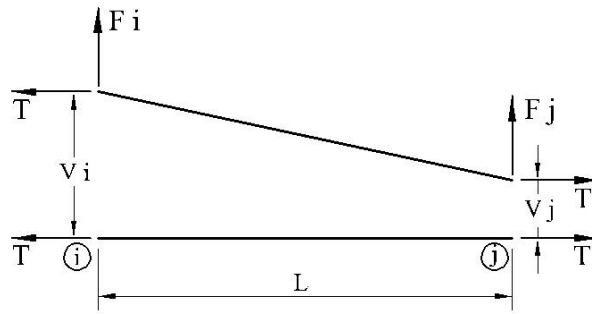


Figura 1.10 Cargas actuando en el elemento cable.

Tomando momentos en **j** tenemos.

$$F_i = \frac{T}{L}(V_i - V_j) \quad (a)$$

Del equilibrio vertical.

$$F_j = -F_i \quad (b)$$

Combinando la ecuación (a) con la (b), las fuerzas laterales pueden ser expresados en términos de un desplazamiento lateral por la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad Fg = Kg.V \quad (1.6)$$

Note que la matriz de rigidez geométrica Kg de 2x2 no es función de las propiedades mecánicas del cable, solamente en función de la longitud del elemento y la fuerza en el elemento. De forma similar se deduce para el comportamiento de un edificio que es igual a.

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{w_i}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Donde w_i es el peso de la carga muerta total encima del piso i , h_i es la altura del piso i . El desarrollo deducido aquí es completamente equivalente a las aproximaciones más teóricas normalmente usadas para la formulación del incremento de la rigidez en el análisis estructural no-lineal.

De acuerdo a autores como E. L. Wilson, A. Habibullah el incremento del efecto *P-Delta* debe ser menos del 5% respecto al análisis lineal. De lo contrario la estructura es demasiado flexible.

1.2. ANÁLISIS ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS.

Un análisis estático por el *Método De Los Desplazamientos* conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la siguiente forma.

$$\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f} \quad (1.8)$$

$\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{d}$, y $\underset{\sim}{f}$ son respectivamente la matriz de rigidez (de la estructura), el vector de desplazamientos y el vector de fuerzas nodales.

Esta matriz $\underset{\sim}{S}$ es formada por la acumulación de las contribuciones de rigidez de los diferentes elementos estructurales que corresponden al modelo en el análisis.

La resolución del sistema de ecuaciones anterior, nos da todos los desplazamientos nodales considerados en el modelo. Luego, conociendo los desplazamientos de extremidad de cada elemento estructural y las cargas actuantes en los correspondientes elementos, es posible calcular los esfuerzos solicitantes en una sección transversal cualquiera.

Las reacciones de apoyo pueden ser calculados por composición de los esfuerzos solicitantes de extremidad de los elementos estructurales que inciden en los puntos de vinculación externa.

Minimizar el almacenamiento computacional de los coeficientes nulos de la matriz \tilde{S} es de gran importancia para un análisis estructural eficiente. Por que el almacenamiento de coeficientes nulos, corresponden a desperdiciar posiciones de memoria de computador, que incide en el tiempo de computación; lo cual se cuidaba antes, actualmente la importancia es por su exactitud de la simulación.

En general, una estructura es un conjunto caracterizado por una geometría mas o menos complicada y compuesta por materiales con ecuaciones constitutivas complejas. Un modelo Dinámico daría lugar a soluciones y métodos complejos. La variante primordial entre una carga estática y una dinámica es que esta última es dependiente del tiempo.

1.3. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS.

El término dinámica puede definirse como una variable en el tiempo por lo que una acción dinámica es aquella que su magnitud, dirección y/o posición varían con el tiempo. De manera similar, la respuesta de una estructura a una acción dinámica, por ejemplo sus esfuerzos, tensiones o desplazamientos, es también variable en el tiempo.

Una diferencia sustancial entre el análisis Estático y el análisis dinámico consiste en que el análisis dinámico no presenta solución, mas bien, hay soluciones diferentes para cada instante de tiempo. La dificultad básica del análisis dinámico proviene del hecho que las deformaciones que provocan las fuerzas de inercia, son afectadas por dichas fuerzas, convirtiéndose en un problema cíclico, cuya forma de resolver es formular el problema en términos de ecuaciones diferenciales.

Debido las los efectos de las acciones externas que varían con el tiempo sobre la estructura. Los causas de las acciones externas donde el efecto dinámico es relevante, son:

- Acciones ambientales, ondas, sismos, vientos.
- Funcionamientos anormales de los sistemas estructurales.

Las estructuras, cuando están sujetas a cargas o desplazamientos en la base, en realidad actúan dinámicamente, es decir, desarrollan acciones opuestas al movimiento impuesto por

tales cargas o desplazamientos. Si éstos son aplicados muy lentamente, las fuerzas de inercia son bastante pequeñas (al ser las aceleraciones muy bajas) y por lo tanto se puede justificar un análisis de tipo estático.

Fundaciones de maquinarias, puentes (acción de frenado e impacto, etc.), accidentes en reactores nucleares, son acciones externas cuyo efecto es de carácter dinámico.

1.3.1. Pasos En El Análisis Dinámico.

El análisis dinámico de una estructura comprende los siguientes pasos:

- 1.- Cuantificación de las acciones dinámicas a través de la elaboración de modelos matemáticos que los representen adecuadamente, estos pueden ser determinísticos y aleatorios.
- 2.- Definición del modelo estructural adecuado al estudio que se pretende realizar.
- 3.- Definición del modelo matemático que representa bajo el punto de absorción de energía y de deformación o comportamiento de la estructura.
- 4.- Solución y aplicación de las teorías de las vibraciones al estudio del comportamiento del modelo para la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento y la obtención de los factores de amplificación, con el objetivo. De cuantificar los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, reacciones de apoyo, esfuerzos solicitantes, etc. Estos se pueden realizar por métodos analíticos y/o métodos numéricos.

A partir de la información dinámica obtenida el cálculo prosigue en los moldes habituales de la teoría de las estructuras.

1.3.3. Modelo Matemático De Un Grado De Libertad.

El concepto de grado de libertad está vinculado al de un movimiento (desplazamiento o giro) de un punto cualquiera de la construcción. Obviamente en una construcción hay infinitos puntos pero sus movimientos no son independientes porque están vinculados por los componentes de la estructura. En consecuencia se considera grado de libertad a todo movimiento independiente de un punto de la construcción. Esta definición parece absoluta

pero al reflexionar un poco se advierte que es contingente ya que depende del propósito para el que se utilizará el “grado de libertad”.

El sistema modelo matemático de un grado de libertad es representado con la siguiente figura.

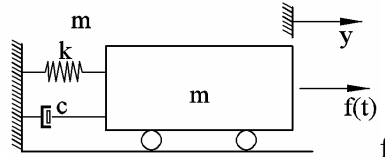


Figura 1.11. Modelo matemático de un grado de libertad.

En la que se representa los siguientes elementos:

1. El elemento masa “ m ” representa el peso dividido por la gravedad y la característica inercial de la estructura.
2. El elemento resorte “ k ” representa la fuerza de restitución elástica y la capacidad de la energía potencial de la estructura.
3. El elemento de amortiguación “ c ” representa la característica friccional y la pérdida de energía de la estructura.
4. La fuerza de excitación “ $f(t)$ ” representa las fuerzas externas actuando en el sistema estructural. La fuerza $f(t)$ esta escrita de tal forma que indica que es función del tiempo.

1.3.3.1. Modelo Matemático De Un Grado De Libertad Sistema No Amortiguado.

Por simplicidad de estudio dinámico se comienza por un sistema no amortiguado. Este modelo matemático se representa en la figura:

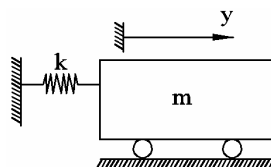


Figura 1.13. Modelo matemático para un sistema de un grado de libertad no amortiguado.

El caso primero supone una idealización que no se corresponde con situaciones reales; la inmensa mayoría de las estructuras de arquitectura e ingeniería civil poseen un amortiguamiento y pueden ser catalogadas en el conjunto de situaciones representadas en el punto segundo. Los casos de amortiguamiento corresponden, generalmente, a elementos propios de ingeniería mecánica tales como aparatos amortiguadores o elementos de absorción dinámica.

1.3.4. Principio De D’Alambert.

Haciendo uso del principio D’Alambert cuyo estado del sistema puede ser el estado de equilibrio dinámico por adición de las fuerzas externas, fuerzas ficticias, las que son comúnmente conocidas como fuerzas de inercia. La figura 1.9 muestra el diagrama de cuerpo libre.

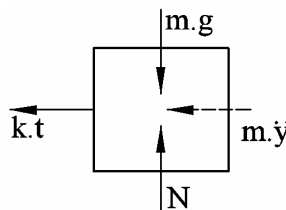


Figura 1.17. Fuerzas externas e Inerciales.

La aplicación del principio de D’Alambert, nos permite el uso de ecuaciones de equilibrio en la obtención de la ecuación de movimiento.

El concepto de que una masa desarrolla una fuerza inercial proporcional pero opuesta a su aceleración, es un recurso muy conveniente en problemas de dinámica estructural porque permite expresar las ecuaciones del movimiento como ecuaciones de equilibrio dinámico.

La fuerza dinámica Actuante puede representar muchos tipos de fuerzas actuando sobre la masa como ser:

- Apoyos elásticos que se oponen a los desplazamientos
- Fuerzas viscosas que resisten velocidades
- Fuerzas externas definidas independientemente.

Así, si se introduce una fuerza interna que resiste aceleraciones, la ecuación del movimiento es meramente una expresión de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la masa. En muchos problemas simples la vía más directa y adecuada para formular las ecuaciones del movimiento es mediante dichas ecuaciones de equilibrio directas.

1.3.5. Combinación Modal.

Para una dirección definida de aceleración, los máximos desplazamientos, fuerzas y tensiones son computados por toda la estructura para cada uno de los modos de vibración. Estos valores modales para una cantidad de respuestas son combinadas para producir un simple resultado positivo, para la dirección definida de aceleración usando uno de los siguientes métodos.

a. Análisis Modal Espectral.

El *análisis modal espectral* o método de la respuesta espectral es un método ventajoso para estimar los desplazamientos y fuerzas en los elementos de un sistema estructural. El método implica el cálculo solamente de los valores máximos de los desplazamientos - y las aceleraciones - en cada modo usando un espectro de diseño, el mismo que representa el promedio o la envolvente de espectros de respuesta para diversos sismos, con algunas consideraciones adicionales expuestas en los códigos de diseño. Luego se combinan estos valores máximos, por ejemplo mediante un promedio ponderado entre la media y la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales valores máximos; otro método es el de la combinación cuadrática completa (método C.Q.C.), que considera además una correlación entre los valores modales máximos. De este modo, se obtienen los valores más probables de desplazamientos y fuerzas.

b. Método de Combinación Cuadrática Completa.

El método C.Q.C. por sus siglas en ingles Complete Quadratic Combination fue desarrollado por Wilson, Der Kiureghian y Bayo (1981).

Este método toma en cuenta el acoplamiento estadístico entre los modos espaciados más cercanos causados por amortiguación modal. Incrementando la amortiguación modal se incrementa el acoplamiento entre los modos espaciados-próximos. Si la amortiguación es

cero para todos los modos el método degenera al método de S.R.S.S. (Square of The sum of their squares).

c. Metodo de Combinación Modal General.

El método G.M.C. o combinación modal general fue desarrollado por Gupta (1990). Este método toma en cuenta el acoplamiento estadístico entre modos espaciados-cercanos similar al método C.Q.C., pero también incluye la correlación entre modos con contenido respuesta-rígida. Este método requiere que se especifique dos frecuencias $f1$ y $f2$ las cuales definen la respuesta rígida contenida en el movimiento del suelo.

Estos deben satisfacer $0 < f1 < f2$. Las partes de la respuesta-rígida de todos los modos son asumidos siendo perfectamente correlativos.

El método G.M.C. asume una respuesta no rígida debajo de la frecuencia $f1$, completamente rígido encima la frecuencia $f2$, y una interpolación de porcentaje de respuesta rígida para frecuencias $f1$ y $f2$.

1.3.6. Time History.

Los análisis pueden realizarse considerando un comportamiento lineal fuerza-desplazamiento del material; eventualmente pueden considerarse comportamientos no lineales para los análisis *tiempo - historia*, donde tenemos lo siguiente:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P.sen.wt$$

Donde la ecuación es resuelta paso a paso para intervalos de tiempos pequeños

1.3.6.1. Método De Solución Paso A Paso.

El método de solución más completo para el análisis dinámico en un método incremental en el cual las ecuaciones van siendo resueltas en los tiempos Dt , $2Dt$, $3Dt$, etc. Hay un gran número de métodos de solución incremental. En general, estos métodos involucran una solución de todo el conjunto de ecuaciones en cada incremento de tiempo. En el caso de un análisis no lineal, puede ser necesario reformular la matriz de rigidez de todo el sistema estructural para cada paso. Además, se efectuarán iteraciones dentro de cada incremento de

tiempo, para satisfacer las condiciones de equilibrio. Como los requerimientos de cómputo son significativos, estos métodos pueden emplearse para resolver sistemas estructurales con pocos cientos de grados de libertad.

Adicionalmente, en estos métodos de solución, el amortiguamiento numérico o artificial debe ser incluido, con el propósito de obtener soluciones estables. En ciertos casos de estructuras con comportamiento no lineal sujetas a movimientos en la base, es indispensable el empleo de los métodos de solución incremental.

En sistemas estructurales muy grandes, se ha encontrado que la combinación de los métodos incrementales y de superposición modal ha sido eficiente para sistemas con un pequeño número de elementos no lineales.

1.3.7. Modos y Periodos Naturales de Vibrar.

Se debe obtener un número de modos naturales de vibrar suficientes para lograr un adecuado análisis dinámico (sismo), se recomienda utilizar una cantidad de modos tal que la suma de la masas asociadas a cada uno de ellos llegue a por lo menos el 90% de la masa total de la estructura en cada dirección de análisis (“X” y “Y”).

No se requiere conocer modos de vibrar en la dirección “Z”, ya que se estima que los sismos se presentaran a varios kilómetros de distancia de la estructura, por lo que el movimiento; será fundamentalmente horizontal.

Se recomienda Utilizar el método de “RITZ” (Load Dependent Ritz Vectors), que para análisis sísmico es el mas adecuado, ya que genera modos de vibrar en las direcciones de análisis, que son las horizontales “X” y “Y”.

Para mayor información revisar:

- Wilson E.L. three Dimensional Dynamic Analysis of structures, Computers And Structures, Inc. 1997.
- Wilson E.L. Yuan M. y Dickens J., Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, Earthquake Engineering And Structural Dynamics. 1982.

Usualmente se consigue llegar al 90% de la masa total en cada dirección de análisis “X” y “Y” utilizando unos 12 o 24 modos obtenidos por el método de Ritz. Los vectores de Ritz al ser dependientes de la “Carga” o acción que les da origen, genera modos de vibrar justamente asociados a las direcciones de esas “acciones”, por lo que se recomienda utilizar como “acciones” generadoras las aceleraciones “X” y “Y”.

Se puede Utilizar el método “exacto” de encontrar los valores y vectores característicos (EIGEN) pero se tiene la desventaja de que usualmente se requieren unos 30 a 60 modos de vibrar, ya que al ser los modos “exactos”, los programas encuentran los modos en cualquier dirección, entonces tenemos por ejemplo modos “verticales” (con tendencia principal a mover la estructura en la dirección vertical) que no sirven para el análisis y también aparecen otros modos con combinaciones de movimiento entre vertical, horizontal y torsional, que tienen muy poca masa asociada, por lo que se requiere de muchos modos para alcanzar el 90% en cada dirección.

El método de Ritz para efectos de análisis sísmicos es mas preciso directo y eficiente, mientras que el método EIGEN se puede utilizar por ejemplo para análisis dinámicos de vibraciones de maquinarias, fundaciones, etc.

En sistemas estructurales muy grandes, se ha encontrado que la combinación de los métodos incrementales y de superposición modal ha sido eficiente para sistemas con un pequeño número de elementos no lineales.

CAPITULO 2

EDIFICIOS ALTOS

2.1. INTRODUCCIÓN.

En la actualidad predominan en nuestro medio los edificios altos de concreto armado, los cuales se caracterizan por un comportamiento estructural conjunto, de sus diversos elementos contribuyentes, los cuales son: vigas, soportes, losas, cajas de elevador, muros de cortante, resistentes a esfuerzos laterales como viento, sismo, etc.

El proyecto estructural de tales edificaciones queda condicionado a imposiciones de orden urbanístico, arquitectónico, económico y de seguridad, aparte de otros factores como funcionalidad y confort humano. Estas imposiciones son en la mayor parte de las veces conflictivas entre si, siendo que un proyecto estructural seguro facilitara a tomar decisiones en otras áreas que no son de seguridad estructural.

Para una determinada forma y altura de edificación, por ejemplo un mayor número de pisos, nos puede conducir a envigamientos de pequeña altura o losas sin vigas, lo que exige un análisis de esfuerzos más precisos.

Un análisis “preciso” no es simple de ser efectuado, grandes vanos libres y edificios elevados imponen u obligan a adoptar columnas, pared o núcleos verticales resistentes, estos elementos no son fáciles de ser idealizados, estructuras muy esbeltas pueden permitir bajo la acción del viento, grandes oscilaciones en la punta, afectando el confort humano y exigiendo un estudio cuidadoso para que esto sea evitado. Muchos otros aspectos podrían ser enumerados, pero podríamos concluir de la necesidad de un análisis estructural bien elaborado.

Dada la importancia creciente del modelo tridimensional, se describirán resumidamente los aspectos teóricos en los que están basados, sin pretender abordar todos los aspectos de

análisis estructural de edificios altos, pero mostrando que en la actualidad, con las herramientas computacionales, es posible un eficiente análisis de esfuerzos utilizando la concepción tridimensional.

2.2. CRITERIOS DE USO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO EN EDIFICIOS ALTOS.

Tradicionalmente los edificios de gran altura eran metálicos, actualmente el concepto ha cambiado principalmente por el avance tecnológico del concreto armado, ya que el edificio mas alto en la actualidad, nos referimos al edificio Taipei 101 en Taipei Taiwán (*Figura 2.1*), tiene una altura de 509m. (101 pisos año 2004), utilizando diversos materiales en su construcción. En estructuras off shore en Noruega se llega a 1500 kg/cm² de resistencia del concreto.



Figura 2.1. Torre Taipei 101.

El tipo de estructura más adecuado varía en función de la altura del edificio. Khan considera que es posible escoger en cada caso un tipo de estructura para el cual sean siempre las condicionantes los esfuerzos debido a las solicitaciones verticales.

Lo que significa que la consideración de la acción del viento tiene pequeña incidencia en el costo de la estructura.

La *Figura 2.2* relaciona, según Khan, el número de pisos con 2.70 a 3.00 metros de altura por piso con el tipo de estructura más adecuada:

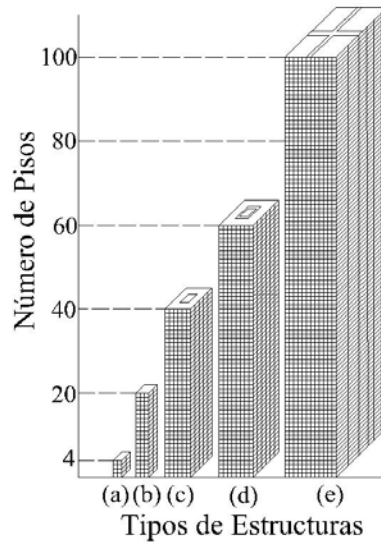
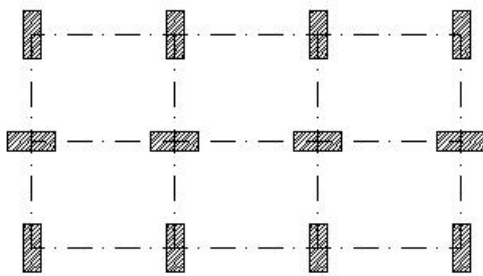
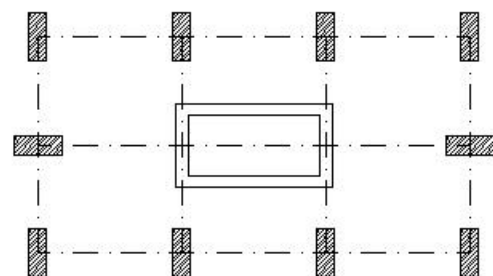


Figura 2.2. Concepción estructural en función del Número de Pisos.

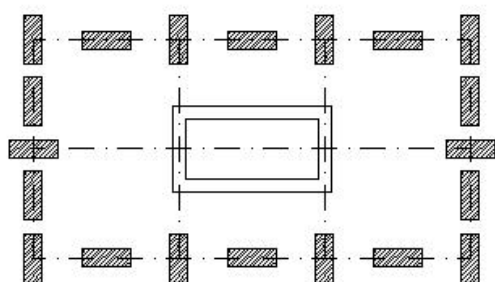
Detalles en planta de cada caso respecto el número de pisos:



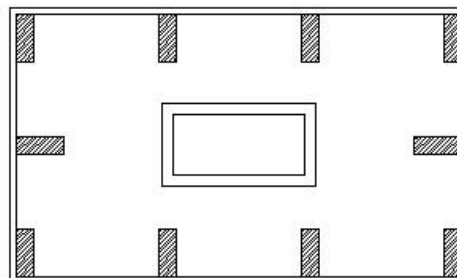
2.2.a) Estructura Reticulada.



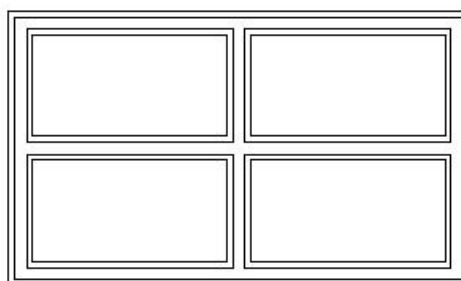
2.2.b) Estructura reticulada con pared Resistente a solicitaciones horizontales



2.2.c) Estructura mixta con gran densidad de columnas en la periferia



2.2.d) estructura constituido por núcleos de columnas en la periferia



2.2.e) Estructura Tipo Consola

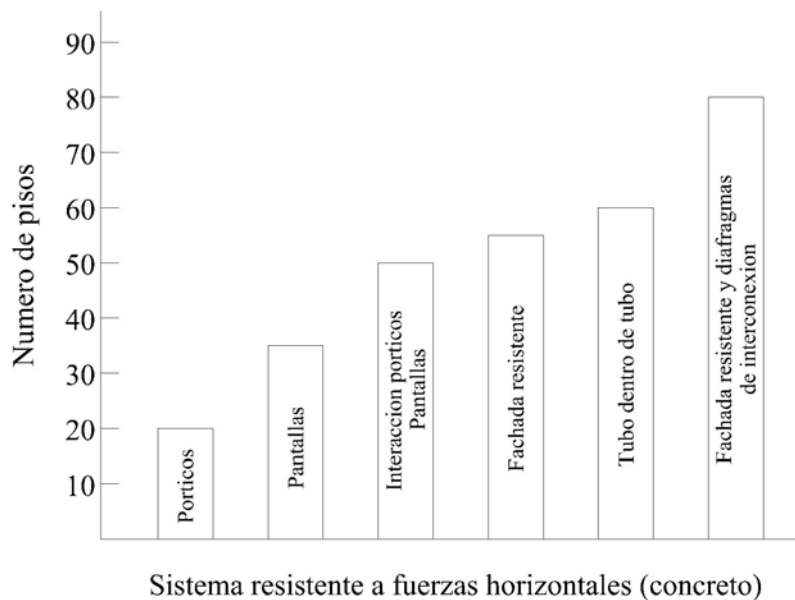


Figura 2.3. Representación en planta en función del Número de Pisos.

De forma resumida, las estructuras de edificios se pueden clasificar en:

- a) **Estructuras Reticuladas** (*Figura 2.2.a*). Constituidas de un gran numero de columnas unidas por vigas, losas y elementos verticales de separación (paredes).
- b) **Estructuras de Pared** (*Figura 2.2.d, 2.2.e*). Formados de elementos verticales de superficie unidos por losas y vigas eventuales, elementos de separación (paredes).
- c) **Estructuras Mixtas** (*Figura 2.2.b, 2.2.c*). Resultado de la asociación de los dos tipos anteriores.

Un caso particular son los edificios prefabricados, en su mayor parte constituidos por paneles horizontales y verticales. Estos paneles están unidos por juntas de comportamiento muy variable, aunque tales estructuras pueden en principio encuadrarse en el tipo “b” anteriormente definido (estructuras de pared), la continuidad garantizada por las juntas exige en cada caso un estudio del tipo de esfuerzo transmitido entre paneles. Por esta razón tales edificios están fuera del presente estudio.

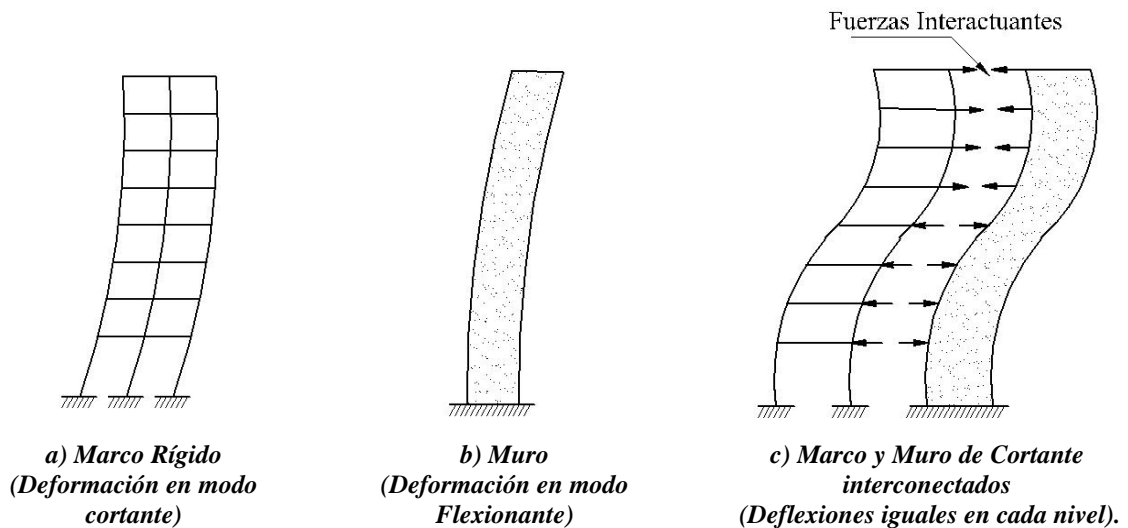


Figura 2.4. Modos de Deformación

Las Estructuras reticuladas, cuando son sometidas a cargas laterales, se deforman en modo cortante (*Figura 2.4.a*). Las estructuras de pared se deforman en modo flexionante (*Figura 2.4.b*), cuando las deformaciones debidas al esfuerzo de corte se tornan relevantes

comparativamente con las deformaciones de momento flector, estas deformaciones de esfuerzo de corte referidas a las distorsiones en elementos infinitesimales a lo largo del elemento estructural, provocan el encorvamiento de las secciones transversales de este elemento. En el caso de las estructuras mixtas, se tiene una interacción entre los dos tipos de deformaciones anteriores, esquematizados en la *Figura 2.4.c*, se observa en este último caso, que la parte inferior de la edificación, la parte reticulada se apoya en la columna-pared y en la parte superior se tiene la situación opuesta.

En el caso de estructuras no simétricas, las cargas laterales del viento o sismo provocan torsión en el edificio, el puede tener carácter muy importante. Esto ocurre principalmente cuando existe un núcleo vertical fuera de las condiciones de simetría como se muestra en la figura:

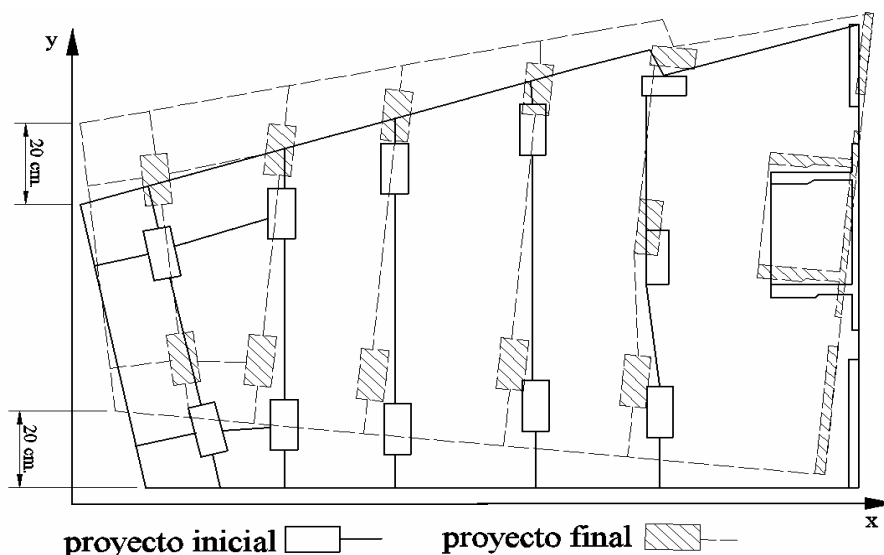


Figura 2.5.- Edificio siete de septiembre: torsión del último piso.

2.3. MODELOS DE ANÁLISIS.

Es prácticamente imposible modelar de forma exacta los edificios, esto por que muchos aspectos pueden ser considerados, como por ejemplo:

- No linealidad geométrica y de Material.

- Alteración de las propiedades del material con el tiempo.
- No Homogeneidad del material.
- Efecto de temperatura y de construcción incremental.
- No definición precisa de las solicitaciones externas y de las condiciones de apoyo (interacción Suelo-Estructura), etc.

Con todo en ingeniería nos conformamos con modelos, que dentro de los límites económicos impuestos y la herramienta disponible para el análisis, traduzca el comportamiento real de la edificación. De esta forma es usual aceptar análisis lineales, suponiendo Homogeneidad del material, sin considerar el efecto constructivo incremental. Las fuerzas dinámicas debidas al viento son en la mayor parte de las veces asimiladas o fuerzas estáticas equivalentes. De esta forma habrá que cuantificar las solicitaciones debidas al viento y juzgar sobre su carácter estático o dinámico de la estructura del edificio, Teniendo en cuenta las condiciones de seguridad y confort humano.

La altura del edificio es el principal factor para escoger los criterios de análisis estructural y de dimensionamiento mas adecuados se presentan en el siguiente cuadro, los elementos que permitan avalar en un primer análisis cuales los criterios a adoptar en función de la altura de edificios.

TABLA 2.1. *Criterios Para Adoptar el tipo de Edificio.*

TIPO DE EDIFICIO	CRITERIO A ADOPTAR
Hasta 10 pisos, formas convencionales sin gran asimetría en relación a la acción del viento.	Asimilar la acción del viento a una presión estática, variable con la altura limitar la deformación en el punta a $0.001xH$.
De 10 a 20 pisos, formas convencionales sin gran asimetría.	Asimilar la acción del viento a una presión estática que englobe el efecto de turbulencia. Limitar la deformación en la punta a $0.001xH$.
Formas especiales hasta 20 pisos y edificios con mas de 20 pisos	Efectuar el calculo de la fuerza del viento en forma dinamica, limitar la deformaciones en función del periodo propio.

La limitación de deformación en la punta de un edificio de altura **H** a **0.001xH** corresponde a un criterio simplificado de confort humano. La Norma Boliviana NBH-87, indica que la deformación en punta es de:

$$0.00133xH \text{ o } \frac{H}{750} \text{ para edificios menores a 15 pisos.}$$

Para calcular el periodo propio de un edificio antes se recurrirá a formulas empíricas del tipo.

$$T = \frac{n}{10} = \frac{n}{11}$$

$$T = \frac{0.09 \times H}{\sqrt{B}}$$

Como

$$H \geq 5a$$

Donde:

T = Periodo Propio fundamental, en segundos.

n = Numero de pisos.

H = Altura del edificio en metros.

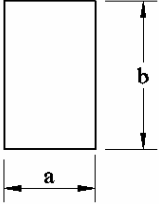
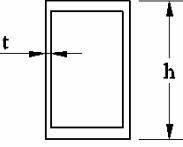
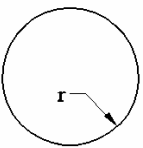
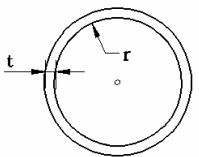
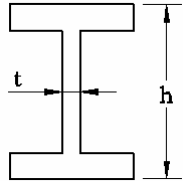
B = Dimensión relativa a la dirección de la oscilación, en metros.

Actualmente con los programas de computadora se hace un cálculo más exacto del periodo de vibración.

La idealización tridimensional puede ser hecha indirectamente a partir de los diversos pórticos planos que forman el edificio o considerando directamente la edificación bajo el concepto tridimensional como será estudiado. En ambos casos es usual considerar las losas con rigidez infinita para deformación en su propio plano, como también despreciar la rigidez de flexión de las losas. Se dice entonces, que tales losas son asimiladas a diafragmas. Eventualmente aquella rigidez a flexión puede ser considerado, de forma aproximada, idealizando fajas de losa que trabajen como elementos tipo emparrillado o por medio de discretizaciones en elementos finitos de flexión de placa.

Las columnas-pared y cajas de ascensores pueden también ser discretizados en elementos finitos, pero más fácilmente idealizados en elementos unidimensionales, tomando en cuenta la deformación por cortante de la sección transversal utilizado para este fin los coeficientes de forma (para distintas secciones transversales del elemento), esta idealización a dado buenos resultados comparado con los métodos analíticos (teoría de la Elasticidad – Timoshenko – Goodier) con errores del 2%.

A continuación se dan algunos valores de coeficientes de forma que se consideran para estimar los valores de deformación por cortante.

Sección	Valor Del Coeficiente De Forma	Descripcion
	$\frac{5}{6} \times b \times d$	Sección rectangular la fuerza de corte paralelo b o d en dos direcciones
	$2.t.d$	Tubo rectangular sección delgada, fuerzas de corte paralelo en dirección d
	$0.9 \times \pi \times r^2$	Sección redonda llena las fuerzas de corte en cualquier dirección
	$\pi \times r \times t$	Sección de tubo delgado circular, las fuerzas de corte en cualquier dirección
	$\frac{5}{3} \times t_f \times b_f$	Perfil de pestaña ancha, las fuerzas de corte en dirección a la pestaña

La hipótesis de rigidez infinita, para deformaciones de la losa en su propio plano, compatibiliza los desplazamientos horizontales en este plano, de tal manera que cada losa tiene los desplazamientos esquematizados en la figura 2.6. De este modo las fuerzas restitutivas son consideradas según los siguientes grados de libertad.

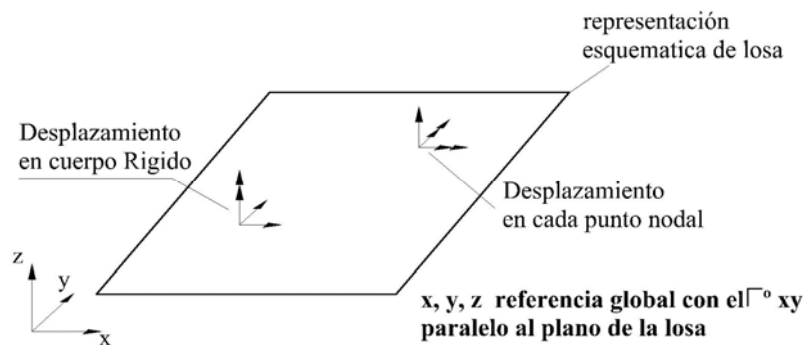


Figura 2.6.- Grados de libertad al nivel de cada losa

- a) Tres grados de libertad (3 desplazamientos) de elemento emparillado en cada punto nodal de extremidad de faja de faja de losa o de un elemento finito de flexión de placa. Tales desplazamientos son designados como ***desplazamientos independientes de cada nudo***.
- b) Tres desplazamientos de cuerpo rígido de cada losa, para movimientos en su propio plano. Estos desplazamientos son designados ***desplazamientos de piso***.

Un análisis estático con los desplazamientos citados anteriormente se justifican principalmente en edificios con cargas o descensos diferenciales de apoyo.

Un análisis dinámico se justifica cuando la posibilidad de ocurrencia de solicitaciones sísmicas o para estudiar condiciones de confort humano. Para este análisis es usual considerar apenas características de masa concentrada al nivel de cada losa, y contribuyendo con fuerzas de inercia según los desplazamientos de piso referidos anteriormente cuando las fuerzas restitutivas elásticas para este análisis, pueden ser supuestos según los referidos desplazamientos independientes de nudo y según los desplazamientos de piso, o con hipótesis simplificadoras de comportamiento estructural para reducir grados de libertad eventuales en el análisis con la primera opción, se torna

necesario una consideración estática de los desplazamientos independientes de nudo, con el hecho de obtener relaciones entre fuerzas, desplazamientos, velocidades y aceleraciones envolviendo apenas desplazamientos de piso.

Los referidos desplazamientos de piso pueden ser medidos en relación a una referencia global x y z , o en relación de un piso inmediatamente inferior. Los primeros son designados como **desplazamientos absolutos** son mas usuales y son representados en la figura 2.7a. Los últimos sugeridos por Stamato Smith (1968) son designados **desplazamientos relativos** y están esquematizados en la figura 6b.

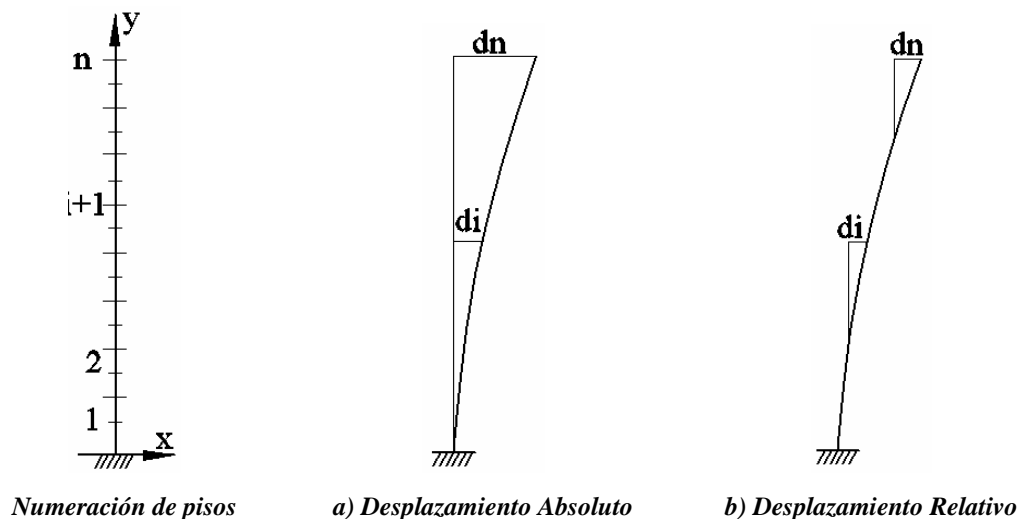


Figura 2. 7.- Desplazamiento lateral de piso.

2.4. PARTICULARIDADES DEL MODELO TRIDIMENSIONAL.

El modelo tridimensional es muy versátil para considerar los más diversos detalles estructurales. A continuación se describen algunos de estos detalles.

2.4.1. Trechos Rígidos De Extremidad De Elemento Estructural.

En el caso particular de columna-pared por su gran ancho en relación a su longitud, provoca en sus extremidades de las vigas conectadas a ellos un desplazamiento vertical también una rotación.

Este fenómeno es representado en el panel discretizado suponiendo una columna-pared idealizado en su eje vertical y las referidas a las vigas adicionales de una longitud igual al semi-ancho del soporte o columna de rigidez infinita. A estas partes indeformables de viga se denominan **trechos rígidos** (Figura 2.8.)

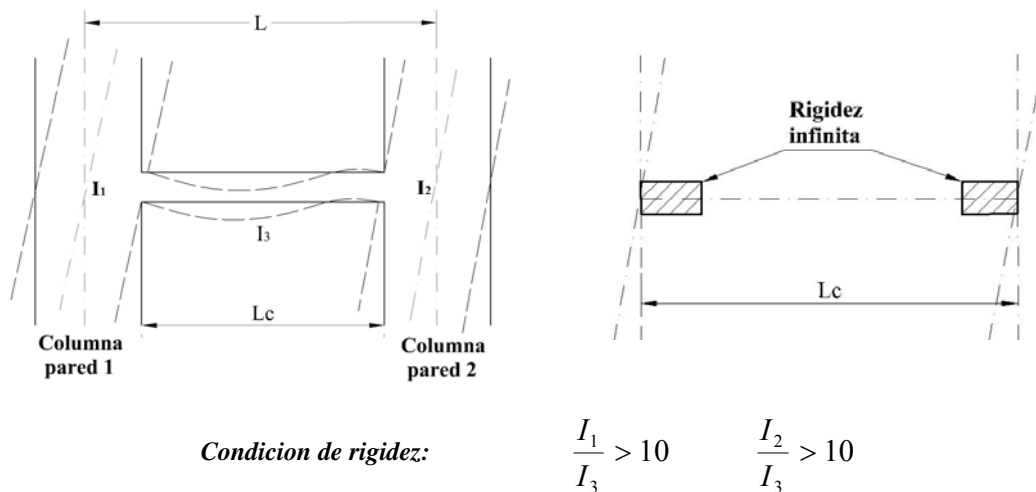


Figura 2.8.-Efecto de la deformación de columna pared.

2.4.2. Esbeltez.

Cuando el índice de esbeltez esta encima de 5, el problema del viento se torna muy importante. Entendiéndose por esbeltez lo siguiente:

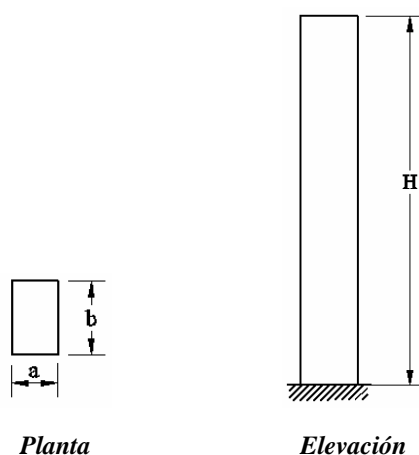


Figura 2.9.- Esbeltez de un edificio.

Donde:

$$a < b$$

$$\text{Esbeltez} = \frac{H}{a}$$

Si $H \geq 5.a$ Calculo de la
solicitación del viento en
forma dinámica.

2.5. EL VIENTO Y EL MOVIMIENTO EN EDIFICIOS ALTOS

CONFORT HUMANO.

El efecto dinámico del viento debe ser investigado para garantizar la estabilidad del edificio.

En los pisos superiores de edificios de gran altura puede provocar problemas de confort humano en relación a las amplitudes de las oscilaciones debidas al viento. Para esto es razonable el uso de velocidades de viento para recurrencia de 50 años. Generalmente se cree que la “aceleración” y la “frecuencia de vibración”, son las principales causas para un desconfort humano. En otras palabras, solamente la porción de vibración de la deflexión del edificio necesita ser considerado. Un criterio tentativo Para el limite del confort humano, esta basado en 5 rangos de aceleración de la gravedad están dados en la tabla 2.2 del autor Fu-Kuei Chang.

TABLA 2.2. Criterio De Confort Humano.

ACELERACIÓN EN PORCENTAJE DE GRAVEDAD	LIMITES DE CONFORT
< 0.5 %	No es Aceptable
0.5 % a 1.5 %	Perceptible
1.5 % a 5.0 %	Incomodo
5.0 % a 15.0 %	Muy incomodo
> 15.0 %	Intorelable

La proyección sobre el eje **X**, del punto **P** se mueve a lo largo del eje de acuerdo a la siguiente ecuación.

$$x = \dot{A} \cdot \cos.wt$$

Donde:

w = velocidad angular.

t = Tiempo.

\dot{A} = Amplitud.

x = Desplazamientos.

La velocidad \dot{x} y la aceleración \ddot{x} de la partícula **P** son:

$$\dot{x} = -A.w \cdot \sin.wt$$

$$\ddot{x} = -A.w^2 \cdot \cos.wt$$

De la ultima ecuación se puede ver que la máxima aceleración es $A.w^2$ Asumiendo que **b** es un porcentaje de **G**, de la aceleración critica.

$$A.w^2 = \left(\frac{b}{100} \right) . g$$

Sustituyendo $w = \frac{2.\pi}{T}$ donde T es el periodo del edificio y $g = 32.2 \left(\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2} \right)$, la amplitud en pulgadas puede ser obtenido por:

$$A = 0.098.b.T^2 \quad (\text{en pulgadas}).$$

$$A = 0.2487.b.T^2 \quad (\text{en centímetros}).$$

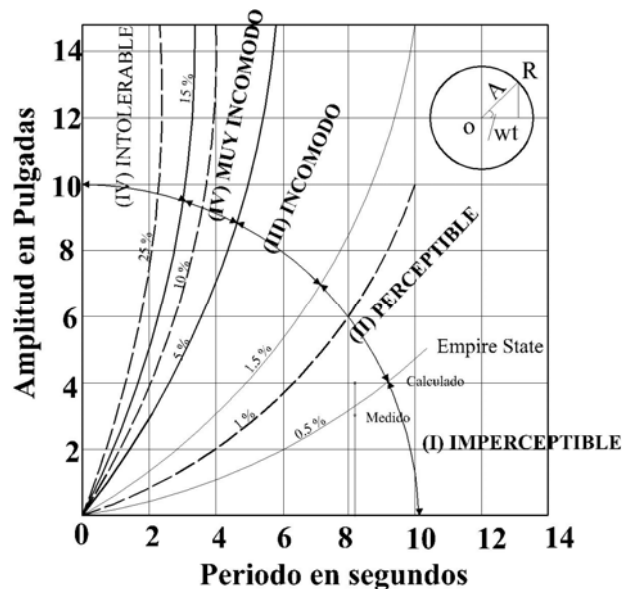


Figura 2.10.- Niveles de vibración y grados de confort.

Ejemplo.- El periodo de vibración del edificio **Empire State** es 8.6 seg. Su amplitud para una recurrencia de viento de 50 años es igual a:

$$A = 0.098 \times 1 \times 8.6^2 = 7.2" \quad \text{para 50 años.}$$

$$A = \frac{7.2}{2} = 3.6" \quad \text{para 10 años.}$$

Para una velocidad de viento de 80 mph. La deflección es 6.5"; en otras palabras la máxima deflección es $6.5" + \frac{7.2"}{2} = 10.1"$, la amplitud de vibración es 3.6" graficando este valor para el periodo 8.6(seg)., en la figura 2.10 puede apreciarse el comportamiento del edificio.

CAPITULO 3

EQUILIBRIO DE HILOS Y CABLES

3.1. INTRODUCCIÓN.

Por su simplicidad, versatilidad, resistencia y economía, los cables se han convertido en un elemento imprescindible en muchas obras de ingeniería. Pensemos en los puentes colgantes, no solo los grandes sino también los pequeños construidos para comunicar una vereda con otra en zonas rurales, los cables para postensado en una obra de hormigón, los tensores o contravientos para luminarias y postes, pagodas o techos, etc.



Pasos de obstaculos



Lineas electricas



Puentes vehiculares



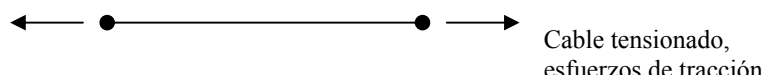
Puentes peatonales

Figura 3.1.- Aplicaciones típicas de la teoria de cables

Por su flexibilidad los cables solo aguantan fuerzas de tracción, se comportan de forma inversa a los arcos, en los cuales, debido a su curvatura, los esfuerzos cortantes y de flexión se pueden hacer nulos y los esfuerzos de compresión se convierten en el soporte de la estructura. En el caso de un cable, la geometría que él adquiere al aplicar las cargas, es tal, que asegura el cumplimiento de las leyes de equilibrio por el solo trabajo a tracción del elemento.

El tipo de geometría que adquiere un cable depende del tipo de cargas actuantes. Por ejemplo, cables sometidos a cargas uniformes en la proyección horizontal adquieren una forma parabólica siguiendo la forma del diagrama de momentos de una viga simple; cables sometidos a cargas puntuales adquieren una forma discontinua en cada punto de aplicación de las cargas y cables sometidos a su propio peso (en este caso no es una carga uniforme) forman una curva llamada catenaria. Un ejemplo de este último caso es el de las redes de energía, en el caso de que la flecha del cable (distancia vertical desde los extremos hasta el punto mas bajo) no sea muy grande esta catenaria se puede aproximar a una parábola.

El Cable es un elemento estructural tipo; no posee rigidez para soportar esfuerzos de flexión, compresión o cortantes. Al someter a cargas a un cable este cambia su geometría de tal manera que las cargas son soportadas por esfuerzos de tracción a lo largo del elemento. Siempre encontraremos que cuando aplicamos una fuerza el cable tendrá otra geometría.



Un cable bajo su propio peso adquiere la forma del diagrama de momentos de tal manera que al encontrar las fuerzas internas en cualquiera de sus puntos el valor del momento sea cero y solo presente componente de tracción como se ve en la siguiente *figura 3.2*.

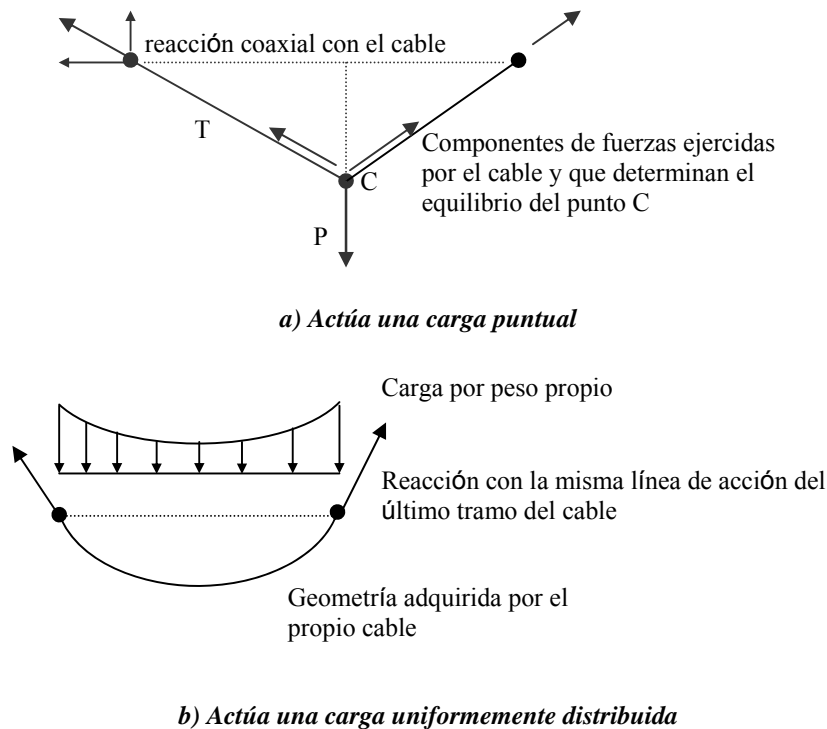


Figura 3.2.- Tracción en los cables debido a los esfuerzos que actúan.

Un cable bajo carga puntual se deforma, para que el $M_i = 0$ en todo punto. Es un elemento con poca I (inercia) y poca A transversal (área) pero con una gran resistencia a la tracción.

El propósito de este capítulo es de presentar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un **cable**, Para comenzar se toma el caso más sencillo el cable se asume inextensible y los soportes se encuentran en el mismo nivel

El propósito de este capítulo es presentar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un cable suspendido bajo la acción de su peso propio. Para comenzar se apela al caso más sencillo: el cable se asume inextensible y los soportes se encuentran al mismo nivel. Luego se considera el caso de extremos a distinta altura, y se obtienen además las expresiones paramétricas para las coordenadas cartesianas. En todos los casos, el tradicional ejemplo de problema isoperimétrico del cálculo de variaciones se emplea como punto de partida para la obtención de las ecuaciones de equilibrio. Dentro de este marco se incorpora la ley de Hooke para analizar el cable elástico.

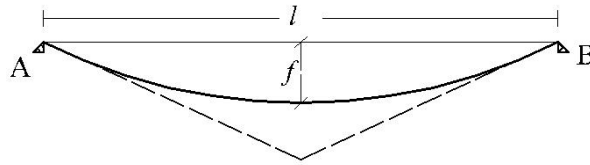


Figura 3.3.- Esquema de un cable.

Donde se observa en la *figura 3.3*, el cable tiene una flecha f , y un largo l ; conociendo dos casos de comportamientos de los cables:

$$n = \frac{f}{l} \leq \frac{1}{8} \quad \text{Cable tenso.}$$

$$n = \frac{f}{l} \geq \frac{1}{8} \quad \text{Cable poco tenso.}$$

3.2. CASO CABLES TENSOS.

a) Cuando Los Extremos A y B Están En El Mismo Nivel.

Donde H es constante en toda la longitud del cable ya que no depende de q . Considerando que el peso produce una carga uniformemente distribuida; la forma que adquiere el cable es el de una parábola cuyo vértice representa el punto mas bajo de este *figura 3.3*.

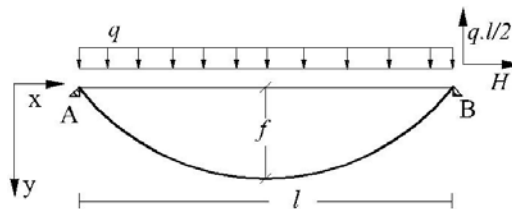


Figura 3.4.- Cable con extremos en un mismo nivel.

Considérese la curva formada por un cable suspendido de dos apoyos ubicados al mismo nivel, bajo la acción de su propio peso. Si el perfil es muy tendido, de manera que la relación entre la flecha y la luz sea 1:8 o menor, la ecuación diferencial que aproxima la condición de equilibrio vertical puede escribirse como.

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = m \cdot g = -q \quad \text{Constante.} \quad (3.1)$$

La que resulta de tomar $\frac{ds}{dx} = 1$ y permite obtener por integración una expresión para y en función de x , si se incorpora las condiciones de borde $y(0) = y(l) = 0$, la solución es.

$$H \cdot y = -\frac{q \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.2)$$

Introduciendo variables adimensionales y designando la flecha por $f = -y(l/2)$; la componente horizontal de la tracción es.

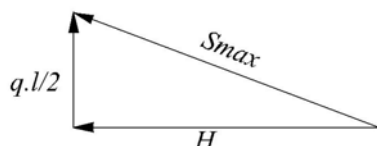
$$H = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f};$$

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot H} \quad (3.3)$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 en función de las características discretas tenemos.

$$y = \frac{q \cdot x}{2 \cdot H} (l - x) = \frac{4 \cdot f \cdot x}{l^2} (l - x)$$

Donde la tensión máxima (tracción máxima) se ejerce en los apoyos cuando $x = \frac{l}{2}$;



$$; \quad s_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2}\right)^2} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} \sqrt{1 + 16 \cdot n^2}$$

$$s_{\max} = q \cdot l \cdot \frac{1 + 8 \cdot n^2}{8 \cdot n} \cong H(1 + 8 \cdot n^2) \quad (3.4)$$

La longitud de la cuerda del cable será.

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + y^2} \cdot dx \cong \int_0^l \left(1 + \frac{y^2}{2}\right) \cdot dx$$

$$L = l + \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot l} = l + (1 + 2.667 \cdot n^2) \quad (3.5)$$

Algunos valores Numéricos:

$$n = \frac{f}{l} \rightarrow \frac{1}{8} \text{ --- } \frac{1}{10} \text{ --- } \frac{1}{12} \text{ --- } \frac{1}{16} \text{ --- } \frac{1}{20} \text{ --- } \frac{1}{25} \text{ --- } \frac{1}{30}$$

$$s_{\max} \rightarrow 1.1250 \text{ --- } 1.0800 \text{ --- } 1.0556 \text{ --- } 1.0312 \text{ --- } 1.0200 \text{ --- } 1.0128 \text{ --- } 1.0089 \cdot H$$

$$s_{\max} \rightarrow 1.1250 \text{ --- } 1.3500 \text{ --- } 1.5833 \text{ --- } 2.0625 \text{ --- } 2.5500 \text{ --- } 3.1650 \text{ --- } 3.7833 \cdot q \cdot l$$

$$L \rightarrow 1.0417 \text{ --- } 1.0267 \text{ --- } 1.0185 \text{ --- } 1.0104 \text{ --- } 1.0067 \text{ --- } 1.0043 \text{ --- } 1.0030 \cdot q \cdot l$$

b) Cuando Los Extremos A y B No Están En El Mismo Nivel.-

Considérese la curva formada por un cable suspendido de dos apoyos ubicados a diferentes niveles, bajo la acción de su propio peso, como se observa en la *figura 3.5*.

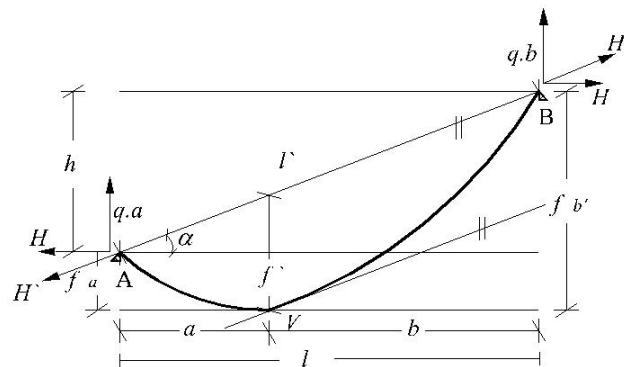


Figura 3.5.- Cable con extremos a diferente nivel.

Encontrando las reacciones en función de la distancia vertical entre el cable, y la línea horizontal que parte del punto B; teniendo:

$$\sum F_v = -qa + qb = 0$$

$qa = qb$; dependen de la carga q en toda la longitud del cable;

Sumatoria de momentos respecto al vértice V;

$$\sum M_v = 0$$

$$-H \cdot f_a + qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$H \cdot f_b - qb \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$\sum H \cdot b = \frac{q}{2} \cdot (b^2 - a^2) \quad (3.6)$$

Donde; $a + b = l$

$$a = \frac{l}{2} - \frac{H \cdot h}{q \cdot l} ; \quad b = \frac{l}{2} + \frac{H \cdot h}{q \cdot l}$$

Reemplazando el valor de a y b en la ecuación;

$$H = \frac{q \cdot l^2}{h^2} \cdot \left(\frac{f_a + f_b}{2} - \sqrt{f_a \cdot f_b} \right) \quad (3.7)$$

Conociendo la relación; $\cos \alpha = \frac{H}{H'}$

$$H' \cdot f' = \frac{q \cdot l'^2}{8} \quad (3.8)$$

3.3. CASO CABLES POCO TENSOS.

Cuando Los Extremos A y B Están En El Mismo Nivel.

Siendo no constante el factor de la carga; cuando $n \geq \frac{1}{8}$; de la siguiente ecuación de equilibrio tenemos:

$$H \cdot y'' = -q \cdot \frac{ds}{dx} = -q \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

La solución será;

$$y = -\frac{H}{q} \cdot \cosh \cdot \frac{q}{H} \cdot x = -\frac{H}{2 \cdot q} \left(e^{\frac{q \cdot x}{H}} + e^{-\frac{q \cdot x}{H}} \right) \quad (3.9)$$

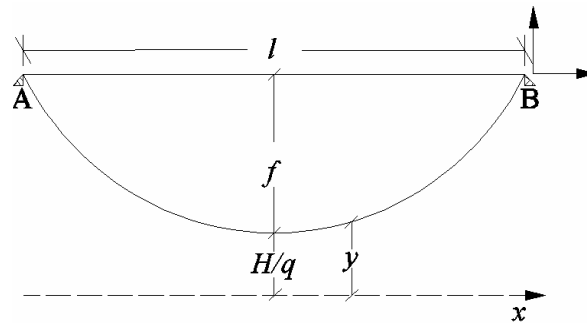


Figura 3.6.- Cable poco tenso.

De la figura 3.6 tenemos la ecuación de la flecha;

$$f = \frac{H}{q} \cdot \left(\cosh \cdot \frac{q \cdot l}{2 \cdot H} - 1 \right) \quad (3.10)$$

La tensión máxima será;

$$s = \frac{H}{\cos \phi} = H \cdot \sqrt{1 + y'^2} ; \quad s = H \cdot \cosh \cdot \frac{q}{4} \cdot x = -q \cdot y$$

$$s_{\max} = H + q \cdot f \quad (3.11)$$

Derivando dicha tensión nos dará la longitud real del cable;

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}$$

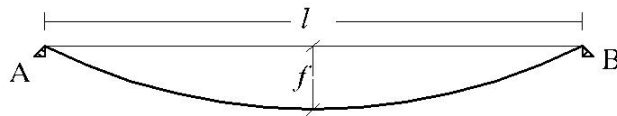
$$L = 2 \cdot \frac{H}{q} \cdot \cosh \cdot \frac{q \cdot l}{2 \cdot H} \quad (3.12)$$

Para el mejor entendimiento del estudiante del funcionamiento y análisis de los cables, se mostraran los siguientes problemas; donde actúan cargas uniformemente distribuidas sobre ellas y cargas puntuales, con apoyos en un mismo nivel y en diferentes niveles.

3.4. EJERCICIOS.

Ejercicio 1.

Calcular la flecha “ f ” y la longitud “ l ” necesarios en un alambre unido a dos puntos (A y B), separados a 1080 metros y que están al mismo nivel. Para que la tensión máxima sea de 1200 (kg/cm²), como se muestra en la siguiente figura.



Donde tenemos:

$$S_{\max} = q \cdot l \cdot \frac{(1+8n^2)}{8 \cdot n} \quad (3.4) \quad ; \quad \sigma = \frac{S_{\max}}{A} \quad \text{esfuerzo (3.13),}$$

Conociendo el peso del cable.

$$q_{\text{cable}} = \gamma \cdot A \quad \text{donde} \quad q_{\text{cable}} = q$$

Igualando ecuaciones (3.4) y (3.13).

$$\gamma \cdot A \cdot l \cdot \frac{(1+8n^2)}{8 \cdot n} = \sigma \cdot A \quad ; \quad \sigma = \gamma \cdot l \cdot \frac{(1+8n^2)}{8 \cdot n} \quad (3.14)$$

$$\gamma = 0.0078 \text{ (kg/cm}^3\text{)} \quad \text{El peso específico de cable.}$$

$$\sigma = 1200 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad \text{La tensión máxima.}$$

Partiendo de la tensión máxima deseada hallamos el valor de la flecha de la ecuación (3.14).

$$\sigma = 1200 = 0.0078 \cdot 108000 \cdot \frac{\left[1 + 8 \cdot \left(\frac{f}{108000}\right)^2\right]}{8 \cdot \frac{f}{108000}}$$

$$f = 10146.13 \text{ cm.}$$

Donde la flecha para dicha tensión es.

$$f = 101.46 \text{ metros} \quad \underline{\text{Solución}}$$

Debiendo calcular factor n de la ecuación (3.14) para dicha tensión máxima.

$$1200 = 0.0078 \cdot 108000 \cdot \frac{[1 + 8 \cdot n^2]}{8 \cdot n}$$

$$n = 1.33$$

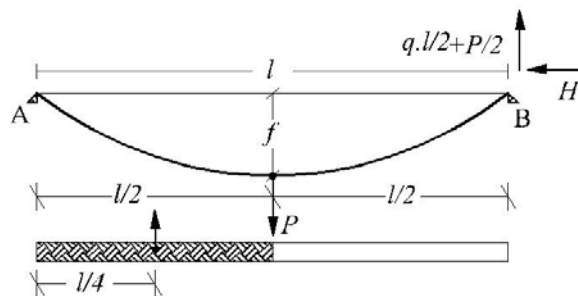
De la ecuación (3.5), $L = l + (1 + 2.667 \cdot n^2)$

La nueva longitud del cable será.

$$L = 1080 + (1 + 2.667 \cdot 1.33^2) = 1085.7 \text{ metros} \quad \underline{\text{Solución}}$$

Ejercicio 2.

Determinar el esfuerzo máximo de un cable, cuyos extremos están a nivel; sometidos a un peso “ P ” en un punto medio del cable como se observa en la figura.



Sumatoria de momentos isostáticos en el punto medio,

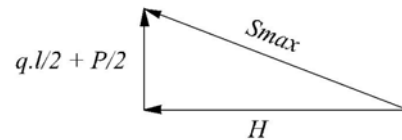
$$H \cdot f = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

Donde
$$H \cdot f = \frac{q \cdot l^2}{8} + \frac{P \cdot l}{4}$$

Dividiendo entre f tenemos,

$$H = \frac{\frac{q \cdot l^2}{8} + \frac{P \cdot l}{4}}{f} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} + \frac{P \cdot l}{4 \cdot f}$$

Del teorema de Pitágoras de un triángulo tenemos,



$$S_{\max}^2 = H^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2} + \frac{P}{2} \right)^2$$

Teniendo el esfuerzo máximo del cable,

$$S_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2} + \frac{P}{2} \right)^2} \quad \text{Solución}$$

Ejercicio 3.

Comparar los resultados aproximados que se obtienen, suponiendo la curva parabólica con los exactos correspondientes a la catenaria para el caso en que $n = \frac{1}{8}$.

Valores de la parábola.

$$\text{a) } H = q \cdot l \quad ; \quad \text{b) } S_{\max} = 1.125 \cdot q \cdot l \quad ; \quad \text{c) } L = 1.0417 \cdot l$$

Partiendo de la ecuación de la catenaria para el mencionado caso tenemos,

$$\frac{f}{l} = \frac{H}{q \cdot l} \left(\cosh \cdot \frac{q \cdot l}{2 \cdot H} - 1 \right) = \frac{1}{8}$$

Volviendo a una variable, $\frac{H}{q \cdot l} = A$

donde A es la constante de a) cumpliendo el caso $n = \frac{1}{8} = 0.125$;

Tenemos, $A(\cosh \cdot A - 1) = \frac{1}{8}$

Para un valor de A tenemos; $\frac{H}{q \cdot l} = 1.02$

$$1.02(\cosh \cdot 1.02 - 1) = 0.125$$

$$0.125 = 0.125 \quad \text{Cumple}$$

Donde el H de la catenaria es; $H = 0.125 \cdot q \cdot l$

Para b) una relación de la catenaria; $S_{\max} = H + q \cdot f$

Además; $\frac{l}{8} = f$

Reemplazando el valor de H hallado; $S_{\max} = 1.02 \cdot q \cdot l + q \cdot \frac{l}{8}$

Donde el S_{\max} de la catenaria es; $S_{\max} = 1.145 \cdot q \cdot l$

Para c) una relación de la catenaria es: $L = 2 \cdot \frac{H}{q \cdot l} \cdot \sinh \cdot \frac{q \cdot l}{2 \cdot H}$

Reemplazando el valor de H hallado; $L = 2 \cdot \frac{1.02 \cdot q \cdot l}{q \cdot l} \cdot \sinh \cdot \frac{q \cdot l}{2 \cdot (1.02) \cdot q \cdot l}$

$$L = 2.04 \cdot \sinh \cdot (0.490)$$

Donde el L de la catenaria es; $L = 1.04 \cdot l$

Comparando los resultados de la parábola y la catenaria:

Porcentaje de defecto

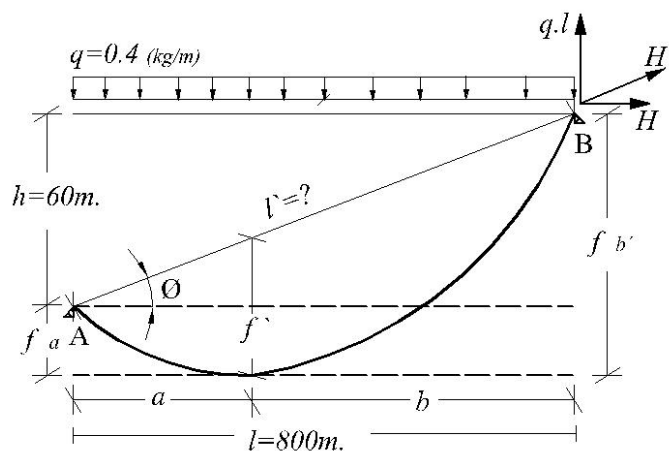
$$\frac{H_C}{H_P} = \frac{1.02 \cdot q \cdot l}{q \cdot l} = \frac{1.02}{1} = 1.02 \quad 2\%$$

$$\frac{S_{\max_C}}{S_{\max_P}} = \frac{1.145 \cdot q \cdot l}{1.125 \cdot q \cdot l} = 1.018 \quad 1.8\%$$

$$\frac{L_C}{L_P} = \frac{1.04 \cdot l}{1.0417 \cdot l} = 0.99 \quad 1\%$$

Ejercicio 4.

Los extremos A y B de un cable cuyo peso $q = 0.4 \text{ (kg/m)}$; están separados horizontalmente a una distancia de $L = 800 \text{ m.}$, existiendo verticalmente entre ellos un desnivel de 60 cm. El vértice de la parábola se halla comprendido entre A y B y esta a 10 m. por debajo del punto A. ¿Calcular la tensión horizontal H' , la posición del vértice y la flecha vertical f' medida desde la cuerda?



Donde $f_a = 10 \text{ m.}$

De la ecuación (3.7) de cables a diferentes niveles,

$$H = \frac{q \cdot l^2}{h^2} \left(\frac{f_a + f_b}{2} - \sqrt{f_a \cdot f_b} \right)$$

Reemplazando tenemos;

$$H = \frac{0.4 \cdot 800^2}{60^2} \left(\frac{10 + 70}{2} - \sqrt{10 \cdot 70} \right) ; \quad H = 963.02 \text{ (kg)}$$

Conociendo además;

$$a = \frac{l}{2} - \frac{H \cdot h}{q \cdot l} = \frac{800}{2} - \frac{963.02 \cdot 60}{0.4 \cdot 800} = 219.43 \text{ (m)}$$

$$b = \frac{l}{2} + \frac{H \cdot h}{q \cdot l} = \frac{800}{2} + \frac{963.02 \cdot 60}{0.4 \cdot 800} = 580.56 \text{ (m)}$$

Del teorema de Pitágoras de un triángulo tenemos;

$$l' = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{800^2 + 60^2} = 802.24(m.)$$

Hallando el ángulo;

$$\tan g.\phi = \frac{h}{l} = \frac{60}{800}, \quad \phi = 4.28^\circ$$

La tensión real del cable;

$$\cos.\phi = \frac{H}{H'} \quad ; \quad H' = \frac{H}{\cos.\phi} = \frac{963.02}{\cos.4.28^\circ}$$

$$H' = 965.7(kg) \quad \underline{\text{Solución}}$$

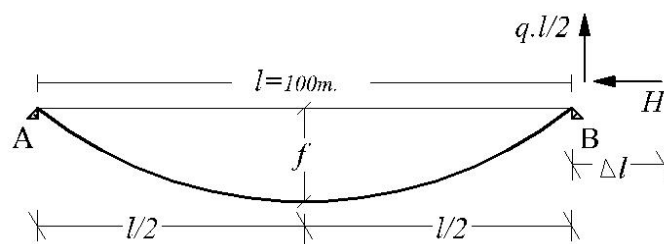
La posición de la flecha vertical;

$$f' = \frac{q \cdot l'^2}{8 \cdot H'} = \frac{0.4 \cdot 802.24^2}{8 \cdot 965.7}$$

$$f' = 33.32(m.) \quad \underline{\text{Solución}}$$

Ejercicio 5.

Un cable de 100 metros de longitud esta unida a dos puntos situados a un mismo nivel o altura, entre los que existe una distancia de 100 metros. ¿Determinar la flecha y la tensión; con su peso especifico de $\gamma = 7800(kg/m^3) = 0.0078(kg/cm^3)$, con un modulo de elasticidad $E = 2,1 \times 10^6(kg/cm^2)$.



Comparando dos soluciones del alargamiento de un cable:

Solución Mecánica,

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad ; \quad \frac{H}{A} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \quad ; \quad \Delta l = \frac{H \cdot l}{A \cdot E}$$

Teniendo la ecuación de la tensión; $H = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f}$

El peso; $q = \gamma \cdot A$

Donde la deformación es; $\Delta l = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^3}{8 \cdot f \cdot E \cdot A} = \frac{\gamma \cdot l^3}{8 \cdot f \cdot E} \quad (3.15)$

Solución Geométrica,

La longitud es; $L = l + \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot l}$

Donde la deformación será; $\Delta l = \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot l} \quad (3.16)$

Igualando las dos soluciones mecánica y geométrica de la deformación de un cable, (3.15) y (3.16) para ser compatibles;

$$\Delta l = \frac{\gamma \cdot l^3}{8 \cdot f \cdot E} = \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot l}$$

Despejando f tenemos;

$$f = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \gamma \cdot l^4}{64 \cdot f \cdot E}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,0078 \cdot (100 \cdot 100)^4}{64 \cdot 2,1 \times 10^6}}$$

$$f = 120.30(cm.) = 1.20m. \quad \underline{\text{Solución}}$$

Donde la tensión máxima σ_{\max} ; (s_{\max}) será;

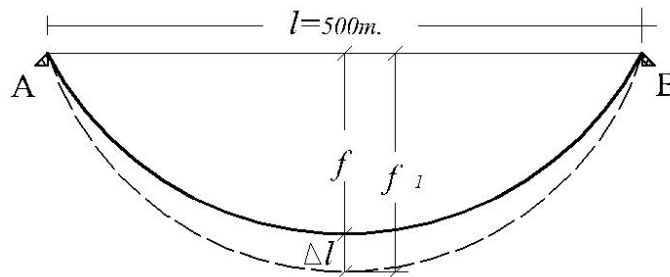
$$\sigma_{\max} = \frac{H}{A} \quad ; \quad \sigma_{\max} = \frac{\frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f}}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^2}{8 \cdot f \cdot A}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma \cdot l^2}{8 \cdot f} = \frac{0,0078 \cdot (100 \cdot 100)^2}{8 \cdot 120,30}$$

$$\sigma_{\max} = 810.47(\text{kg} / \text{cm}^2) \quad \text{Solución}$$

Ejercicio 6.

¿Calcular la flecha de un cable para una longitud de $L = 504\text{m}$.? Encontrándose sus puntos en un mismo nivel separados a una longitud $l = 500\text{m}$., teniendo en cuenta el alargamiento elástico del cable, como se muestra en la figura.



Para el desarrollo se tiene dos concepciones:

Despreciando el alargamiento,

Tenemos; $\lambda = L - l = 504 - 500 = 4\text{m}$. (alargamiento mecánico);

Donde la ecuación (3.16); $\Delta l = \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot l}$

$$f = \sqrt{\frac{3 \cdot l \cdot \Delta l}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 500 \cdot 4}{8}} = 27,38\text{m}.$$

Donde la tensión máxima será; $\sigma_{\max} = \frac{H}{A} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f \cdot A}$

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^2}{8 \cdot A \cdot f} = \frac{0,0078 \cdot (50000)^2}{8 \cdot 2738} = 890,25(\text{kg} / \text{cm}^2)$$

Sin despreciar el alargamiento,

$$\frac{8 \cdot f_1^2}{3 \cdot l} = \lambda + \Delta l \quad (3.17) ; \quad \lambda = 4m. \quad (\text{alargamiento en el cable})$$

Donde el alargamiento;

$$\Delta l = \frac{H \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f_1} \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^3}{8 \cdot A \cdot E \cdot f_1} = \frac{\gamma \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot f_1} \quad (3.18)$$

Reemplazando la ecuación (3.18) en (3.17) tenemos;

$$\frac{8 \cdot f_1^2}{3 \cdot l} - \frac{\gamma \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot f_1} - \lambda = 0$$

Reemplazando los valores tenemos;

$$\frac{8 \cdot f_1^2}{3 \cdot 50000} - \frac{0,0078 \cdot (50000)^3}{8 \cdot 2,1 \times 10^6 \cdot f_1} - 400 = 0$$

$$f_1 = 2808.46cm = 28.084m. \quad \underline{\text{Solución}}$$

Donde la tensión máxima será;

$$\sigma_{l-\max} = \frac{0,0078 \cdot (50000)^2}{8 \cdot 2808,46} = 867.9(kg / cm^2)$$

Donde observamos los porcentajes de error de la flecha y tensiones cuando sufre el alargamiento;

$$\frac{f_1}{f} = \frac{28.084}{27.38} = 1.026 \rightarrow 1 - 1.026 = -0.026 \times 100 = -2.6\% \quad \text{Cumpliendo} \quad < n = \frac{f}{l}$$

$$\frac{\sigma_{l-\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{867.9}{890.25} = 0.97 \rightarrow 1 - 0.97 = 0.03 \times 100 = 3\%$$

3.5. VARIACIONES DE PESO Y TEMPERATURA.

Conociendo que el peso de un cable aumenta a medida que la temperatura baja, entrando a lo que se conoce como dilatación. Conociendo el famoso puente de Golden Gate en San Francisco (Estados Unidos). Supongamos que la temperatura, en el mes de enero, puede llegar hasta 12 °C, y que en el verano puede llegar hasta los 39 °C. Consideramos también como factor de seguridad (margen de error), que las temperaturas pueden ser hasta -20 °C en invierno y hasta 45°C en verano.

Lo anterior quiere decir que el puente debe soportar diferencia de temperatura de 65 °C . Si hacemos los cálculos que normalmente realizan los ingenieros constructores y consideramos una longitud de referencia, encontramos que a una temperatura -20 °C el puente se acorta o reduce 61 cm. En el verano los cálculos indican que, para 45 °C, el puente se alarga 39 cm.

En total hay una modificación entre los límites de temperatura ¡1 metro!, si los constructores de puentes no tomaran en cuenta la magnitud de dilatación, la estructura colapsaría.

Para Temperaturas Menores a 0°C.

Cuando la temperatura se encuentra por debajo de los 0°C, el peso del cable va aumentando 0,015(kg / cm) ; en un área de sección transversal en cm^2 . Donde la diferencia es:

$$L - l = \lambda \quad (3.15)$$

Pudiendo escribirse;

$$\lambda = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l} \quad \text{ó} \quad f^2 = \frac{3}{8} \cdot l \cdot \lambda \quad (3.16)$$

Derivando la flecha ecuación (3.16) tenemos;

$$df = \frac{3}{16} \cdot \frac{l}{f} \cdot d\lambda = \frac{3}{16 \cdot \lambda} \cdot d\lambda$$

Derivando H de la ecuación (3.3) tenemos;

$$dH = -\frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{df}{f^2} = -\frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{3}{16 \cdot n} \cdot d\lambda = -\frac{3 \cdot H \cdot d\lambda}{16 \cdot n \cdot f}$$

Calculando las variaciones porcentuales de f y H tenemos;

$$100 \cdot \frac{df}{f} = 100 \cdot \frac{3}{16 \cdot n^2} \quad (\text{Inversamente proporcional a } \frac{f}{l})$$

$$100 \cdot \frac{dH}{H} = 100 \cdot \frac{3}{16 \cdot n^2} \cdot \xi \quad (3.17)$$

Las ecuaciones diferenciales de H , son inversamente proporcional a n^2 . Para el caso de cables poco tensos se desprecia los efectos térmicos o elásticos;

En el caso de cables tensos tenemos:

$$q_0, t_0, f_0 \quad (\text{Condiciones iniciales})$$

$$q, t, f \quad (\text{Condiciones finales})$$

La ecuación de la longitud y la tensión horizontal;

$$L_0 = l + \frac{p}{3} \cdot \frac{f_0^2}{l} \quad (3.18a); \quad L = l + \frac{p}{3} \cdot \frac{f^2}{l} \quad (3.18b)$$

$$H_0 = \frac{q_0 \cdot l^2}{8 \cdot f_0} \quad (3.19a); \quad H = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} \quad (3.19b)$$

Las variaciones de temperatura t , en función a la tensión H son;

$$L - L_0 \cong \alpha \cdot (t - t_0) + \frac{(H - H_0) \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.20)$$

Donde $L - L_0$ variación térmica.

Reemplazando los valores de las ecuaciones (3.18) y (3.19) en la ecuación numero (20) tendremos;

$$f^3 - f \left[\frac{8 \cdot f_0^2}{3 \cdot l^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{q_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot A \cdot f_0} \right] \cdot \frac{3 \cdot l^2}{8} - \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{64 \cdot E \cdot A} = 0 \quad (3.21)$$

Continuando con los ejercicios con temperatura en cables.

Ejercicio 7.

Calcular el aumento de la flecha debido a una temperatura de 40°C , en un cable de cobre con extremos en un mismo nivel, para $l = 2000\text{m}$. y una flecha inicial de $f_0 = 5\text{m}$.

$\alpha = 0.00017$, modulo de elasticidad de $E = 1.2 \times 10^6 (\text{kg} / \text{cm}^2)$ y peso especifico $\gamma = 0.0088 (\text{kg} / \text{cm}^3)$.

Condición térmica la temperatura esta de; mayor a 0°C a 45°C .

Donde $\Delta f = 40^{\circ}\text{C} = f - f_0$

También $\gamma = \frac{q}{A} = \frac{q_0}{A} = 0.0088 (\text{kg} / \text{cm}^3)$

Relacionando tendremos;

$$\frac{f_0}{f} = \frac{500}{580.32} = 0.862 ; \quad (1 - 0.862) \cdot 100 = 13.84\%$$

Reemplazando en la ecuación (3.21) hallamos el valor de la flecha;

$$f^3 - f \left[\frac{8 \cdot f_0^2}{3 \cdot l^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{q_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot A \cdot f_0} \right] \cdot \frac{3 \cdot l^2}{8} - \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{64 \cdot E \cdot A} = 0$$

$$f^3 - f \cdot (24.20) - 55 = 0$$

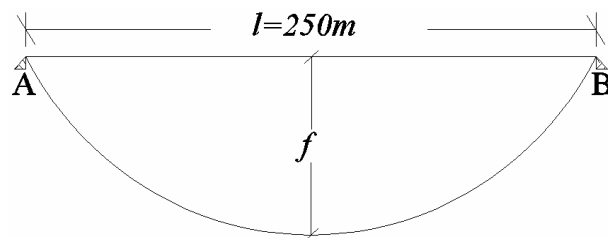
$$f = 5.8\text{m}.$$

Para calcular el aumento tenemos la relación;

$$x = \frac{5.8}{5} = 1.16 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5.8}{5} = (1 - 1.16) \cdot 100 = 16\% \quad \underline{\text{Solución}}$$

Ejercicio 8.

Que flecha f , debe dejarse al montar el cable a una temperatura de $25^{\circ}C$, cable de cobre, cuyos extremos están situados al mismo nivel y separados a una distancia de $l = 250m$.; para que la tensión no supere los $1000(kg/cm^2)$, cuando la temperatura descienda a $-15^{\circ}C$ y se forme un hielo en el cable.



Peso específico; $\gamma = 0.0089(kg/cm^3)$

Modulo de elasticidad; $E = 1.2 \times 10^6(kg/cm^2)$

$$\alpha = 0.00017$$

De la diferencia de temperatura;

$$\Delta T = t_0 - t_f = 25 - (-15^{\circ}C) = 40^{\circ}C$$

La tensión; $\sigma = \frac{H}{A}$

Reemplazando la ecuación (3.19a) tenemos ;

$$\sigma = \frac{\frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f}}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot l^2}{A \cdot 8 \cdot f} = \frac{\gamma \cdot l^2}{8 \cdot f}$$

Temperaturas bajo $0^{\circ}C$;

$$q = \gamma \cdot A \quad ; \quad \gamma = \frac{q}{A} \quad ; \quad q_0 = 0,0015 \cdot A$$

El peso del cable va aumentando;

$$\gamma_0 = \frac{q_0}{A} + \gamma \quad (3.22)$$

$$\gamma_0 = 0,015 + 0,0089 = 0,0239$$

Además; $\gamma = \frac{q}{A} = 0,0089$

Reemplazando en la ecuación (3.21) hallamos el valor de la flecha; reducido es;

$$f^3 - f \left[\frac{\gamma \cdot l^2}{24 \cdot \sigma_0} + \alpha(t - t_0) - \frac{\sigma_0}{E} \right] \cdot \frac{3 \cdot l^2}{8} - \frac{3 \cdot \gamma \cdot l^4}{64 \cdot E} = 0$$

$$f^3 - f \left[\frac{0,0089 \cdot 25000^2}{24 \cdot 1000} + 0,000017(40) - \frac{1000}{2,1 \times 10^6} \right] \cdot \frac{3 \cdot 25000^2}{8} - \frac{3 \cdot 0,0089 \cdot 25000^4}{64 \cdot 2,1 \times 10^6} = 0$$

$$f = 18,69(m) \quad \underline{\text{Solución}}$$

CAPITULO 4

PUENTES

4.1. INTRODUCCIÓN.

Se dice que la historia de la construcción de los puentes, es la historia de la civilización, el grado de desarrollo logrado por un país es reflejado por el grado de desarrollo de sus puentes. El desarrollo de la ingeniería de puentes está basado en la experiencia previa y la formulación de nuevas teorías especialmente relacionadas con la solicitación del viento a puentes de grandes vanos libres, en este aspecto la China continental ha tenido grandes avances en la Ingeniería Aerodinámica, formando ingenieros en esta disciplina, lo cual ha constituido un material de exportación hacia occidente; con la caída de la cortina de hierro también se conocen los trabajos y teorías formuladas por los rusos, que han tenido tradición en el avance de la ingeniería. Otro de los puntales en este tema son los europeos, que van camino a la unificación de una sola norma para el año 2009 el eurocódigo. La reciente construcción de grandes puentes; es Japón el que detenta el record de luz libre, nos referimos al puente Akashi Kaikyo, con luz central de 1991 m y vanos laterales de 960 m haciendo un total de 3911 m en servicio desde 1998.



Figura 4.1. Puente Akashi Kaiko

En la carretera Kobe-Naruto, entre Honshu y Shikoku, se encuentra la isla menor Awaji. Entre ésta y Honshu está el estrecho de Akashi, de cuatro km de longitud y que da nombre al puente, ya que Kayku significa ‘estrecho’.

Finalmente indicamos a los Estados Unidos el cual prácticamente dicta los lineamientos para el diseño de puentes en América Latina.

4.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE DISEÑO.

La planificación y diseño de puentes es arte y compromiso con la Ingeniería Estructural, en este tema el diseñador debe manifestar su capacidad creativa, demostrar su imaginación, innovación y exploración. Los análisis técnicos y económicos son indisputables, pero estos no deben cubrir el proceso total de diseño.

El diseño de puentes es un problema complejo de Ingeniería. Este proceso incluye consideraciones de otros factores importantes, tales como escoger el sistema de puente, materiales, fundaciones, estética, el alcance logrado en un determinado país o lugar y los efectos medio ambientales producidos por su construcción. Lo que se optimiza es la máxima seguridad con el mínimo costo que sea compatible con los principios de la Ingeniería Estructural.

El diseño de un puente usualmente comienza con el desarrollo de una serie de posibles alternativas, considerando los parámetros técnicos y económicos se llega a la solución mas optima para las condiciones específicas de un lugar (tales como la geología, hidrología, navegación, construcción, etc.), esta solución es la combinación de la investigación científica, usando la tecnología moderna.

4.3. FILOSOFÍA DE SEGURIDAD.

Una retrospectiva a la filosofía de seguridad usada en una variedad de especificaciones, resulta en tres posibilidades, diseño por la fatiga admisible con las siglas en ingles (ASD),

diseño por factor de carga (LFD) y en los últimos tiempos el diseño con factores de carga y resistencia (LRFD).

a) El diseño por fatiga admisible se puede expresar por la siguiente formula.

$$\frac{\sum M}{S} \leq \frac{F_y}{1.82}$$

Donde: $\sum M$ = sumatoria de los momentos aplicados

S = modulo resistente elástico

F_y = fatiga de fluencia

La constante 1.82 es el factor de seguridad

b) El diseño por factores de carga obedece a la conocida ecuación:

$$1.30M_D + 2.17M_{L+I} \leq \phi M_U$$

Donde: M_D = Momento de cargas muertas

M_{L+I} = Momento de cargas vivas e impacto

M_U = Momento resistente

ϕ = Factor de reducción

c) El diseño con factores de carga y resistencia (LRFD) esta basado en la estadística de la combinación de cargas y resistencias expresado en el siguiente grafico

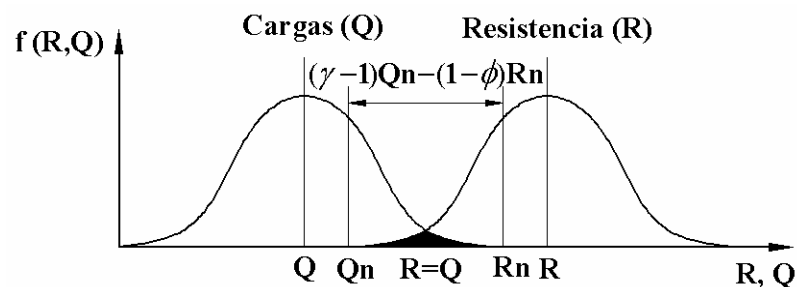


Figura 4.2 Separación de cargas y resistencias

Con lo que se calibra las cargas y los factores de resistencia llegando a los siguientes parámetros

Tipo de carga	Factor de carga
Para la carga muerta de las componentes de construcción	1.25
Para las capas de rodadura	1.50
Para la carga viva e impacto	1.75

Sistema	Esfuerzo	Factor de resistencia
Hormigón Armado	Momento	0.85
	Corte	0.90
Hormigón Preesforzado	Momento	0.95
	Corte	0.90

A partir de estas consideraciones, se resume lo siguiente

Ductilidad	No ductiles	Convencionales	Excepcional
η_D	1.05	1.00	0.95
Redundancia	No redundantes	Convencionales	Excepcional
η_R	1.05	1.00	0.95
Importancia operacional	Importante	Normal	Menos importante
η_i	1.05	1.00	0.95

$$\eta = \eta_D \eta_R \eta_i$$

$$M_U = \eta (1.25M_{DC} + 1.50M_{DW} + 1.75M_{LL+IM})$$

los valores de η son 1.57625 y no menor a 0.95

4.4. SOLICITACIONES EN LOS PUNTES.

Podemos mencionar las cargas permanentes o muertas que se refieren al peso propio de la estructura, postes, pasamanos, señalización, ductos, capa de rodadura, empuje del terreno, subpresion, etc..

Las cargas vivas vehiculares tiene el parámetro de partida del HS 20-44 que se refiere a los vehículos con el siguiente tipo de eje

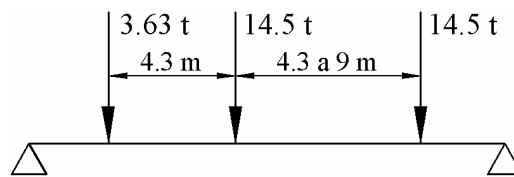


Figura 4.3 Tren de cargas tipo SH 20-44

Pero existe un nuevo tipo de carga de la AASHTO que se utiliza para vanos menores de 12 m que es el eje tandem que representamos a continuación.

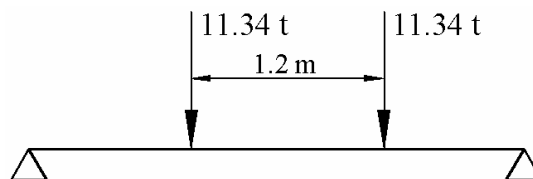


Figura 4.4 Eje tandem

La carga de vía o también llamada equivalente adoptado por la AASHTO, denominada “High way load 93” o HL 93 significa la desviación Standard del tráfico vehicular y se ha determinado usando una calibración de los factores de carga es racional y no representa a ningún tipo de vehiculo, este asemeja a una caravana de ellos. Esta carga de vía es de 9.3 KN/m repartido en un ancho de 3 a 3.6 m.

Es necesario mencionar que en nuestro medio a veces se hacen modificaciones de estas cargas vivas, como ejemplo se utiliza el HS 25 que corresponde a la misma configuración del HS 20, pero incrementada en un 25 % el peso de los ejes, en algunos estados de USA se eleva a usar el HS 30, en este caso incrementando un 50 % el peso de los ejes.

4.5. MODELACIÓN ESTRUCTURAL.

En las oficinas de diseño estructural se recurre a software para resolver los problemas de la Ingeniería, para tener mejor exactitud y eficiencia en el calculo, los paquetes mas conocidos son GT STRUDL, STAD III, SAP 2000 como también algunos mas específicos como el ADINA, NASTRAN y ABAQUS. La modelación de un puente se hace con elementos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales a continuación se muestran algunos ejemplos de esta modelación, como también de las cargas vivas aplicadas.

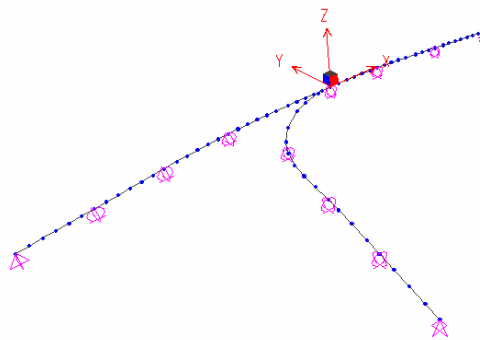


Figura 4.5 Puente modelado con vigas

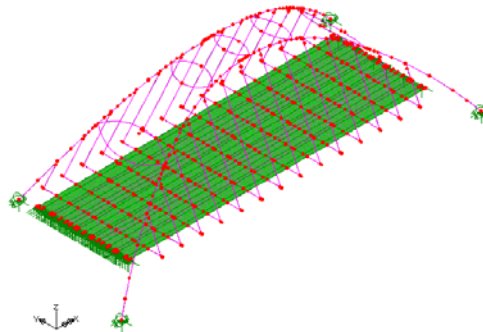


Figura 4.6 Puente modelado con elementos finitos

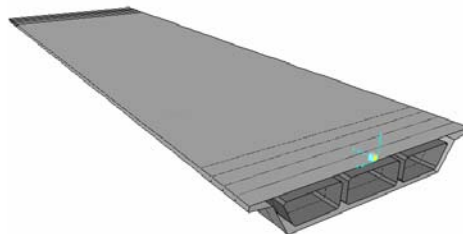


Figura 4.7 Puente con vigas cajón de concreto

Aparte de las cargas vivas vehiculares, los puentes son diseñados para varias combinaciones de carga, para estos estados de carga intervienen los casos de viento, temperatura, etc. En muchos casos, especialmente en zonas de alta sismicidad, las cargas dinámicas controlan el diseño del puente. En este caso es muy importante entender la naturaleza de estas cargas, como también la teoría que gobierna el comportamiento estructural del sistema sujeto a estas cargas dinámicas. Para estos análisis se utilizan los espectros de respuesta que relacionan la aceleración, velocidad o desplazamiento vs. tiempo; tomando en cuenta la amortiguación de la estructura, para este análisis normalmente se utiliza el método de la combinación modal. Pero en algunos casos para estructuras de puente más complejos se utiliza el método del time-history.

4.6. PUENTES DE HORMIGÓN ARMADO.

Las secciones mas usadas son puentes losa, vigas “te” y secciones cajón.

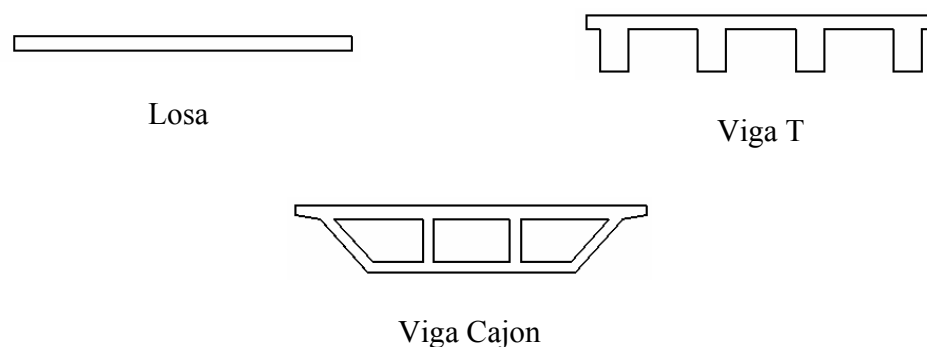


Figura 4.8 Secciones típicas de puentes de hormigón armado

Los puentes losa económicamente factibles son para luces de hasta 9 m si son simplemente apoyados y 12 m cuando son continuos.

Los puentes viga son recomendados entre luces de 12 a 18 m. El ancho de la viga varia de 35 a 55 cm y es controlado por el espaciamiento del acero de refuerzo del momento positivo de tramo. El espaciamiento optimo de las vigas longitudinales es de 1.8 a 3.0 m para un costo mínimo de encofrado y de los materiales estructurales.

Los puentes de sección cajón son usados para vanos de 15 a 36 m; las vigas son espaciadas 1.5 veces el alto del cajón. Mas allá de esta luz, es mas económico usar vigas pretensadas o metálicos. La alta resistencia a la torsión de la sección cajón hace particularmente aconsejable para curvas pronunciadas, para pilas y estribos esviados, también para la elevación de rampas.

Alturas Minimas de las Superestructuras

Tipo de Puente	Simplemente Apoyado	Continuo
Losa	$\frac{1.2(S + 3000)}{30}$	$\frac{S + 3000}{30} \geq 165 \text{ mm}$
Vigas	0.070 L	0.065 L
Puentes Pedestres	0.035 L	0.033 L
Sección Cajón	0.060 L	0.055 L

LIMITES DE DEFORMACION (AASHTO 2.5.2.6.2) AASHTO LRFD 1994

Carga vehicular	L/800
Carga vehicular y/o pedestre	L/1000
Carga vehicular sobre volado	L/300
Carga vehicular y/o pedestre sobre volado	L/1000
Armadura minima de refuerzo	$\rho_{min} \geq 0.03 \frac{f'_c}{f_y}$

4.7. PUENTES DE HORMIGÓN PRETENSADO.

Refiriéndonos a los materiales especialmente los aceros, los mas comunes en el uso del pretensado son el grado 270 con 1860 MPa y el grado 250 con 1725 MPa de baja relajación. En cuanto a este tema ya existen otro tipo de materiales como las fibras

compuestas reforzadas, su alta resistencia a la tensión y su buena resistencia a la corrosión hace que trabajen bien en estructuras de H° P°. Muchas investigaciones han sido desarrolladas en Alemania y Japón desde 1950. En Alemania ha sido construido en 1986 el puente Ulenbergstrasse de dos vanos (21.3 y 25.6 m) de losa llena usando 59 tendones de fibra de vidrio. Este ha sido el primer puente pretensado en el mundo usando materiales avanzados como las fibras. Los cables y alambres están hechos de fibras de vidrio, de carbón embebidos en resinas sintéticas, tiene una tensión última de 1500 MPa a 2000 MPa y su módulo de Elasticidad alcanza 62055 MPa a 165480 MPa. La mayor ventaja de estas fibras es su alta resistencia (la relación de resistencia a la densidad de masa) cerca de 10 a 15 veces más grande que el acero, un bajo módulo de elasticidad hace que las pérdidas del pretensado sean pequeñas, tienen un buen desempeño a la fatiga, por las pruebas efectuadas al menos tres veces más de la tensión última y la tensión principal son alcanzados sin daño del cable sobre 2000000 de ciclos.

4.7.1. Sistemas de Preesforzado.

Los sistemas de preesforzado son el pretensado y postensado. En el pretensado los cables o alambres son tensionados antes de vaciar el concreto (antes del endurecimiento del hormigón). El sistema postensado son métodos en los cuales los tendones son tensados después que el concreto haya alcanzado cierta resistencia específica, este segundo es el más usado para puentes, el método más común de aplicar tensión es con el uso de gatos para postensar.

4.7.2. Tipos de Sección.

Para luces de 6 a 15 m son usados las losas alivianadas. La relación altura/luz es de 0.03 para vano simple o continuo.

Para vanos de 20 a 45 m son usados las vigas I; en nuestro medio los más usados son las vigas BPR y vigas que propone la AASHTO, se menciona que compiten con las vigas de acero, la relación altura /luz es de 0.055 para vano simple y 0.05 cuando es continuo.

Para luces de 30 a 180 m se utilizan vigas de sección cajón, mayormente para puentes anchos para controlar la deflexión. El espaciamiento de las vigas puede llegar a 2 veces la altura. La relación altura/luz es de 0.045 para vanos simples y 0.04 para vanos continuos. La alta resistencia torsional de las vigas cajón hace que sean apropiadas en el uso de puentes curvos, para rampas, etc.

4.7.3. Pérdidas de Pretensado.

Las pérdidas de pretensado se refieren a la reducción de tensión en el tendón. Las pérdidas de pretensado pueden ser divididas en dos categorías.

- Pérdidas instantáneas.- Incluyen pérdidas debidas al anclaje del cono (Δf_{pa}), fricción entre los tendones y el material que lo circunda (concreto) (Δf_{pf}) y el acortamiento elástico del concreto (Δf_{pes}) durante la construcción.
- Pérdidas Diferidas.- Incluyen las pérdidas debido a la retracción del hormigón (Δf_{psr}), la fluencia del hormigón (Δf_{pcr}) y la relajación del acero (Δf_{pr}) durante su vida útil de servicio.

La pérdida total de pretensado (Δf_{pt}) depende del sistema.

Para miembros pretensados:

$$\Delta f_{PT} = \Delta f_{PES} + \Delta f_{PSR} + \Delta f_{PCR} + \Delta f_{PR}$$

Para miembros postensados:

$$\Delta f_{PT} = \Delta f_{PA} + \Delta f_{PF} + \Delta f_{PES} + \Delta f_{PSR} + \Delta f_{PCR} + \Delta f_{PR}$$

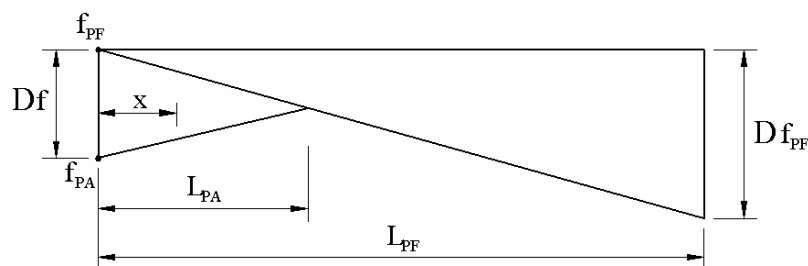


Figura 4.9 Modelo de pérdidas de pretensado a partir del anclaje

a. Pérdidas instantáneas

a.1. Pérdidas debidas al anclaje del cono.- Asumiendo que las pérdidas debidas al anclaje del cono varían linealmente con la longitud (L_{PA}) como muestra la figura 4.9. El efecto del anclaje sobre la tensión del cable puede ser estimado por la siguiente formula

$$\Delta f_{PA} = \Delta f \left(1 - \frac{x}{L_{PA}} \right)$$

$$L_{PA} = \sqrt{\frac{E(\Delta L)L_{PF}}{\Delta f_{PF}}}$$

$$\Delta f = \frac{2 \Delta f_{PF} L_{PA}}{L_{PF}}$$

Donde ΔL = Espesor del cono de anclaje

E = Modulo de elasticidad del bloque de anclaje

Δf = Cambio de tensión debido al anclaje

L_{PA} = Longitud de influencia por el anclaje

L_{PF} = Longitud de un punto donde es conocido la perdida

x = Distancia horizontal desde el punto final de tesado al punto considerado

a.2. Pérdidas por fricción.- Para miembros postensados, las pérdidas de fricción son causados por el perfil del tendón efecto de curvatura y la desviación local en el perfil del tendón efecto de rozamiento. La AASHTO – LRFD especifica la siguiente formula.

$$\Delta f_{PF} = f_{PJ} \left(1 - e^{-(kx+u\alpha)} \right)$$

Donde k = Coeficiente de fricción de rozamiento

u = Coeficiente de fricción de curvatura

x = Longitud de un tendón pretensado desde el punto final de tesado al punto considerado

α = Suma de los valores absolutos del cambio de ángulo en el perfil del cable desde el punto de tesado

Tipos de Tendón y Ductos	Coefficiente de rozamiento $k(1/\text{mm}).10^{-6}$	Coefficiente de curvatura $u(1/\text{rad})$
Tendones en ductos rígidos y semirígidos torones de 7 alambres	0.66	0.05 – 0.15
Tendones preengrasados alambres y torones de 7 alambres	0.98 – 6.6	0.05 – 0.15
Tendones revestidos de mastique alambres y torones de 7 alambres	3.3 – 6.6	0.05 – 0.15
Desviadores de tubos de acero rígido	6.6	0.25 requiere lubricación

a.3. pérdidas por acortamiento elástico del hormigón.- Las pérdidas debidas a los acortamiento elásticos pueden ser calculados usando las siguientes formulas.

$$\Delta f_{PES} = \frac{E_P}{E_{CI}} f_{CGP} \quad \text{para miembros pretensados}$$

$$\Delta f_{PES} = \frac{N-1}{2N} \frac{E_P}{E_{CI}} f_{CGP} \quad \text{para miembros postensados}$$

Donde E_P = Modulo de elasticidad del acero de pre o postensado

E_{CI} = Modulo de elasticidad instantánea del hormigón

N = Numero de tendones

f_{CGP} = Suma de las tensiones del concreto en el centro de gravedad de los tendones de pretensado debido a la fuerza del pretensado

b. Pérdidas diferidas

b.1. Estimación Global.- La AAHSTO – LRFD proporciona la estimación global de las pérdidas diferidas Δf_{PTM} resultante de la contracción y fluencia del concreto y de la relajación del acero de pretensado. La estimación global de pérdidas es aceptable para “condiciones promedio de exposición de la estructura” cuando se sale de estas condiciones se hace una estimación mas refinada. A continuación se da una tabla para condiciones promedio.

b.2. Estimación refinada

b.2.1. Pérdida de contracción.- La pérdida de contracción puede ser determinada con las siguientes formulas

$$\Delta f_{PSR} = 117.21 - 1.0342 H \quad \text{para miembros pretensados}$$

$$\Delta f_{PSR} = 93.77 - 0.8274 H \quad \text{para miembros postensados}$$

Donde H = Humedad relativa promedio anual (%)

b.2.2. pérdidas por fluencia del hormigón.- Esta expresado como

$$\Delta f_{PCR} = 12f_{CGP} - 7 \Delta f_{CDP} \geq 0$$

Donde f_{CGP} = Tensión del concreto en el centro de gravedad a la transferencia del acero de pretensado

Δf_{CDP} = Tensión del concreto al centro de gravedad del acero de pretensado debido a las cargas permanentes, exceptuando la fuerza aplicada al tiempo de pretensar.

b.2.3. pérdida de relajación del acero.- Las pérdidas de relajación Δf_{PR} incluye dos partes relajación al momento de transferencia Δf_{PRI} y después de la transferencia Δf_{PR2} para miembros pretensados inicialmente mas alla de $0.5f_{PU}$

$$\Delta f_{PRI} = \frac{\log 24t}{10} \left[\frac{f_{PI}}{f_{PY}} - 0.55 \right] f_{PI} \quad \text{Para torones de baja tensión y baja relajación}$$

Para torones de baja tensión

$$\Delta f_{PR2} = 1.38 - 0.4\Delta f_{PES} - 0.2(\Delta f_{PSR} + \Delta f_{PCR}) \quad \text{para pretensado}$$

$$\Delta f_{PR2} = 1.38 - 0.3\Delta f_{PF} - 0.4\Delta f_{PES} - 0.2(\Delta f_{PSR} + \Delta f_{PCR}) \quad \text{postensado}$$

Donde t = Tiempo estimado en días de la prueba de transferencia

Para torones de baja relajación Δf_{PR2} es 30% de los valores obtenidos con la ecuación de perdidas por relajación después de la transferencia Δf_{PR2} .

4.8. PUENTES CON DOVELAS.

El inicio de este tipo de puentes fue en Brasil en 1929 Baumgeit construyó un puente sobre el río Peixe en concreto reforzado, vaciando los 68 m de luz del vano principal en volado libre pero el método no prosperó porque utilizaba grandes cantidades de hormigón y acero, hasta el desarrollo de la técnica del postensado. Cuando la construcción segmentada apareció primero en los años 1950 en Alemania usando el vaciado en sitio con Finsterwalder, o el pretensado usando en Francia por Eugene Freyssinet y Jean Muller. El desarrollo de la moderna construcción segmentada es entrelazada con el desarrollo de la construcción de volados sucesivos.

Por el uso del término de volados sucesivos se describe una fase de la construcción de una superestructura de puente. La construcción comienza de las pilas con volados libres a ambos lados luego en cada fase va creciendo una dovela unida a la anterior usando tendones postensados incorporándose permanentemente en la estructura, cada dovela ejecutada sirve de base de construcción para la próxima dovela.

Desde 1950 varios puentes grandes han sido construidos en Alemania con volados sucesivos con una rotula en medio vano, usando segmentos vaciados en sitio, tales como el Moselbrücke Koblenz en 1954, es un puente de 20 metros de ancho con 3 vanos de 101, 114, 123 metros, la sección transversal del puente es de cajones gemelos de altura variable, conectados por la losa superior.

El Reinbrücke Bendorf, 1964 son puentes gemelos de 1031 m de longitud con 3 vanos principales sobre el río de 71, 208, 71 metros, construcción en volados sucesivos con altura variable de la sección cajón.

En Francia la construcción de volados toma una dirección diferente, enfatizándose en el uso de dovelas prefabricadas, elementos prefabricados fueron usados por Eugene Freyssinet para la construcción de seis puentes bien conocidos sobre el río Marne (1946-1950). Los pórticos longitudinales fueron ensamblados con dovelas prefabricadas, los cuales fueron pretensados verticalmente y unidos con junta seca, longitudinalmente postensados con tendones.

A partir de 1960, Jean Muller sistemáticamente aplica dovelas prefabricadas a la construcción de volados sucesivos en puente. Cada dovela es construida junto a la siguiente para tener una perfecta unión para la erección.



Elementos prefabricados

Comparando la construcción de dovelas vaciados en sitio con los prefabricados, se tiene las siguientes conclusiones.

La construcción de volados sucesivos con dovelas vaciados en sitio es un método relativamente lento. El trabajo se realiza en sitio expuesto a las inclemencias climáticas las deformaciones diferidas del concreto se vuelven muy importantes como resultado de las cargas iniciales sobre el concreto fresco. Este método requiere una baja inversión para los encofrados.

La construcción de dovelas prefabricadas es un método de construcción rápido determinado por el tiempo requerido para la erección. La mayor parte del trabajo se realiza en el lugar de fabricación, donde puede ser protegido contra las inclemencias del tiempo. El prefabricado puede comenzar simultáneamente con los trabajos de las fundaciones. Las deformaciones diferidas del concreto son menos importantes, porque el concreto llega a obtener una edad mayor a los 28 días cuando sean colocados en la estructura. Este método requiere una alta inversión en encofrados, grúas, transporte y el equipo de erección. Sin embargo, este método requiere un cierto volumen de trabajo para que sea económicamente viable. La ejecución industrializada de la estructura llega a una alta calidad de producto terminado.

4.8.1. Puentes con Volados sucesivos.

La construcción de volados sucesivos para puentes de sección cajón a sido reconocido como uno de los métodos mas eficaces de construcción de puentes sin necesidad de encofrados. Este método tiene la gran ventaja sobre otras formas de construcción en áreas urbanas donde no se interrumpe el tráfico, en gargantas profundas y sobre ríos donde el encofrado no solamente es caro sino también difícil y peligroso.

La construcción comienza de las pilas y prosigue en volado hacia el centro del vano. Al final una junta de cierre conecta los volados de las pilas adyacentes. La estructura es auto soportado en todos los estados. Las fuerzas nominales desbalanceadas debido a las cargas sobre el volado pueden ser resistidas por varios métodos, donde el equipo de encofrado temporal es re utilizado de pila a pila.

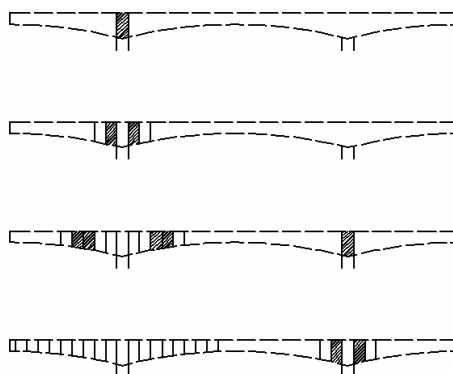


Figura 4.10 Construcción de volados sucesivos

Los métodos más comunes para la construcción con volados sucesivos son los siguientes:

- Conexión monolítica a la pila si es diseñado para la estructura definitiva
- Permanente, si esta presente o sobre doble apoyo y postensado vertical temporal
- Un simple apoyo amarrado debajo de la pila
- Un apoyo contra una elevación del equipo si uno es movilizado para acomodar las dovelas o soportar el encofrado.

Los lados son usualmente contruídos en segmentos de 3 a 5 m. de longitud. Estos pueden ser vaciados en sitio o prefabricados cerca del puente, los cuales pueden ser transportados a una pila específica por tierra, agua y luego colocados en su sitio definitivo.

4.8.2 Altura de arranque del volado y secciones transversales típicas.

La altura típica para la relación vano/altura para vanos de vigas de altura constante están entre 18 a 22, sin embargo secciones de vigas cajón con altura menores a 2 m. presentan dificultad para las operaciones de tesado, dentro de una viga cajón menor que 1.5 m, su vaciado es bastante dificultoso. Por esta razón los vanos económicos deben ser mayores a 40 m, para vanos mayores a 50 m. deben considerarse vigas de altura variable. La relación vano/altura en el arranque de la pila es de 18 y en medio vano menor a 30 criterio usado en U.S.A., en Europa estas relaciones son de 20 en le arranque y 45 en medio vano.

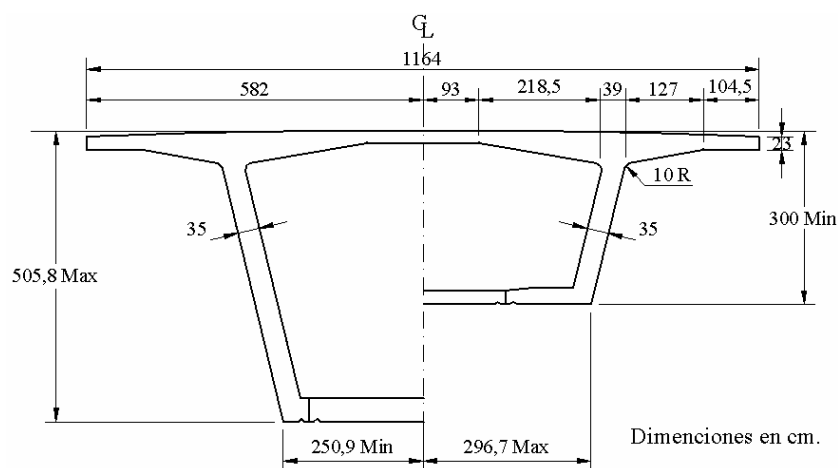


Figura 4.11 Sección transversal típica de una viga cajón de altura variable (vano 93m)

Las vigas cajón de una sola célula son las secciones mas eficientes para su vaciado, en estos los cajones multicelulares son raramente usados en este método de construcción. Paredes inclinados mejoran la estética, pero introducen dificultades adicionales en el encofrado cuando es usado con vigas de altura variable. El área de la losa inferior sobre las pilas es determinado de manera que la fibra inferior en compresión debe ser mejor al admisible; las paredes y la losa inferior deben tener suficiente espacio para acomodar al numero de tendones requeridos en la mitad del vano. Estos espesores son determinados por la fatiga de corte con un ancho mínimo de 25 cm.

4.8.3. Cargas sobre la subestructura.

El método para soportar las fuerzas de desequilibrio durante la construcción de los volados fue descrito anteriormente. Las siguientes fuerzas deben ser considerados en el calculo de un posible desequilibrio.

- En la construcción prefabricada, una dovela desequilibra y la pérdida de un segmento sobre el equilibrio del volado es de última condición.
- En la construcción prefabricada, la presencia de una tensión de plataforma (5 a 10 ton) solamente sobre un volado o el desbalanceo del encofrado deslizante en el caso de una construcción vaciado en sitio.
- Carga viva sobre un lado de 1.5 KN/m^2
- Carga de viento durante la construcción
- La posibilidad de que un volado tenga un 2.5% de peso muerto que el otro.

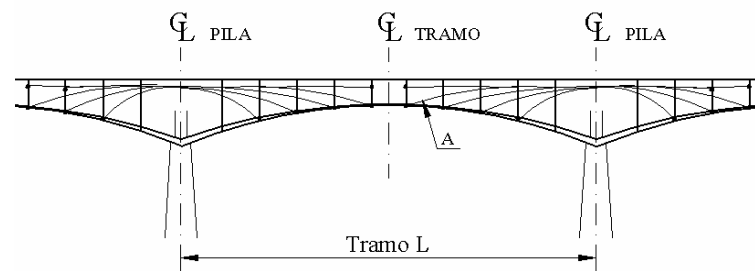
Las cargas sobre la estructura usualmente no gobiernan su diseño de estos elementos; la etapa constructora es el estado de carga más desfavorable.

4.8.4. Perfil típico de cables post-tensados.

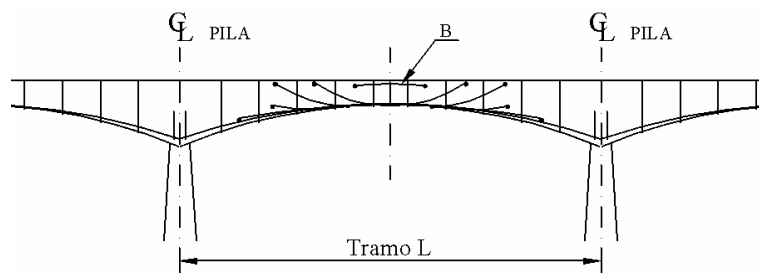
Los tendones post-tensados pueden ser internos o externos a la sección del concreto, internamente se colocan dentro de ductos metálicos. El post-tensionamiento externo

simplifica mucho el proceso de vaciado y reduce excentricidades útiles comparados con los tendones internos son normalmente compensados por pérdidas pequeñas de fricción a lo largo de los tendones.

La dimensión del tendón debe ser hecha de acuerdo a las dimensiones de los elementos de la viga cajón.



(A) Tendones de volado. Longitud promedio $0.52 L$



(B) Tendones de continuidad. Longitud promedio $0.35 - 0.50 L$

Figura 4.12 Perfil de tendones post-tensionados internos

4.9. PUENTES ARCO.

La comunidad de los Sumerios que vivieron en el valle del Tigre-Eufrates descubrieron 4000 a.c., las ventajas del arco y construyeron pequeños puentes arco con ladrillos.

En el tiempo de los romanos fueron construidos muchos puentes arco con piedras. En 1779 el primer puente arco de fierro fue construido en Coalbrookdale Inglaterra sobre el río Severin con una luz de 43 m. Gustavo Eiffel diseñó dos notables puentes arco de acero de 160 m. de luz en Oporto Portugal y otro de 165 m. sobre el río troyeres Santa Flour Francia.

Un arco algunas veces es definido como un miembro estructural curvo, abriendo y sirviendo como un soporte para las cargas encima. Esta definición omite una descripción del tipo de elemento estructural, los momentos, fuerza axial hacen el arco.

Un arco verdadero, teóricamente es aquel que tiene solo fuerzas de compresión actuando en el centroide de cada elemento arco. La forma de un arco verdadero es le inverso del que se forma cuando se tiene dos puntos de apoyo y se cuelga corresponde a una curva catenaria. Prácticamente es imposible tener un arco verdadero de puente excepto para una condición de carga. Un arco de puente usualmente esta sujeto cargas múltiples (cargas muertas, cargas vivas, temperatura, etc.) los cuales producen tensiones de flexión en el arco que generalmente son pequeños comparados con las tensiones axiales. La nomenclatura de un arco se muestra a continuación.

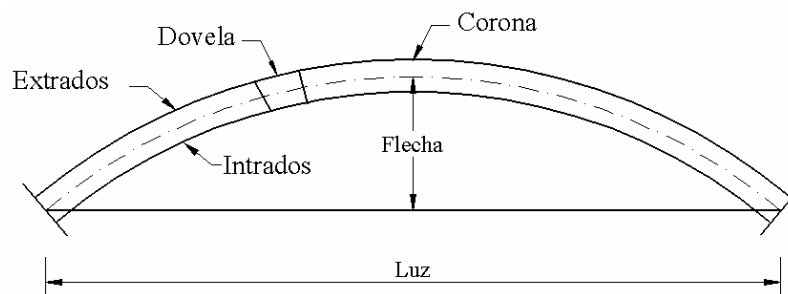


Figura 4.13 Nomenclatura de un arco

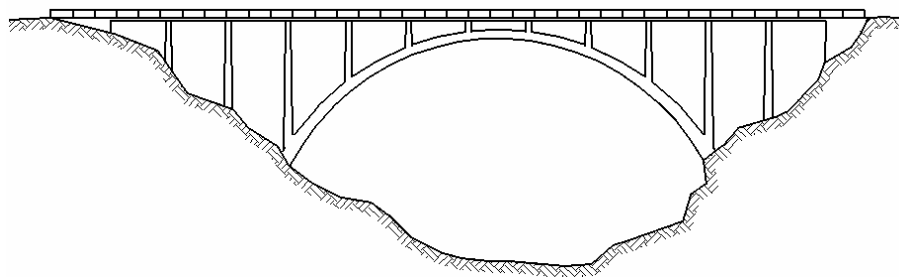


Figura 4.14 Arco de Concreto

4.9.1. Comparaciones de Puentes Arco con otros tipos de puentes.

Los puentes en arco son muy competitivos con los puentes de celosía en vanos mayores a 275 m. si el costo es el mismo o solamente un poco más alto para el puente en arco, por consideraciones estéticas se escoge el puente en arco, en vez del puente celosía.

Para vanos grandes, usualmente sobre el agua, los puentes atirantados son más económicos que los puentes arco. El puente arco tiene una gran desventaja, esta es que el arco debe construirse antes de entrar en funcionamiento. El puente atirantado no tiene esa desventaja, porque los elementos segmentales o dovelas conjuntamente los cables son ensamblados simultáneamente durante el proceso de construcción, pero los puentes arco se continúan construyendo en vanos grandes sobre valles profundos, donde su uso es apropiado.

Desde el punto de vista estético los puentes arco son bellos y no tienen competidores, muchos puentes arco construidos hace mas de 2000 años continúan dentro de las ciudades cuyos residentes consideran que estos puentes no solo son necesarios para el comercio si no que embellecen los lugares por su apariencia.

4.9.2. Tipos de Puente Arco.

De acuerdo a la posición del tablero los puentes arco son de tablero superior, intermedio o inferior. La clasificación referida a las articulaciones de arco son arcos empotrados, arcos tri-articulados en los nudos A, B, C, biarticulados en A y B arcos amarrados en forma vertical y también diagonal como se muestra en la *Figura 4.15* y *4.16*.

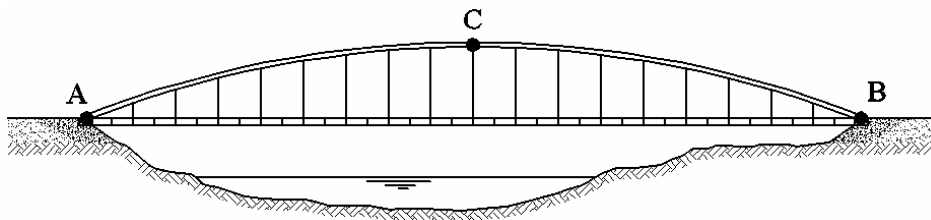


Figura 4.15 Puente arco de acero con pendolones verticales

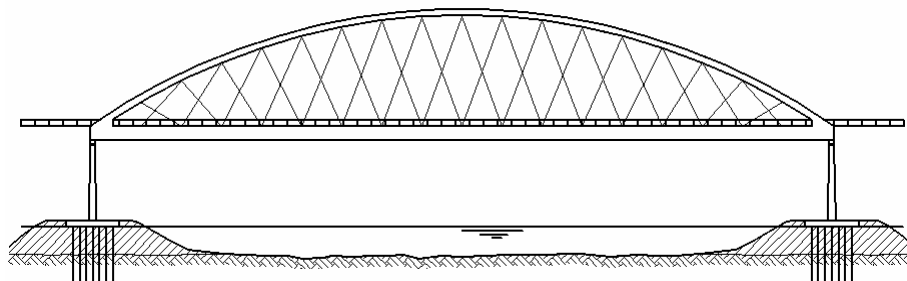


Figura 4.16 Puente arco con pendolones inclinados

Como los ejemplos de puentes arco podemos indicar el Cowlitz con 159 m. de luz, es un puente de sección cajón con cuatro costillas y una flecha de 45 m., prácticamente todos los puentes arco son de este tipo. Otro puente es el que atraviesa el río Mississippi consiste de dos arcos rebajados con luces de 168 m. El puente arco mas largo del mundo es el Wanxian Yabgtze en China con un vano de 425 m. y una flecha de 85 m. la relación flecha/vano es de 1:5 consiste de tubos longitudinales de acero que han ido rellenos con concreto los tubos sirvieron de encofrado. Este puente en realidad es una estructura compuesta de acero-concreto.

El puente arco mas largo de acero tiene un vano de 518 m. que cruza el río Gorge en Fayetteville West Virginia las costillas del arco consisten de celosía de acero, el tablero también es de celosía de acero la relación flecha/vano es de 1:4.6.

4.9.3. Análisis de los puentes arco.

Antes de la era del Análisis estructural por métodos computacionales, los análisis de arco no eran difíciles de hacer, pero los métodos modernos de análisis utilizan elementos tridimensionales no lineales.

La relación de Flecha/luz de un puente arco esta entre 1:4.5 a 1:6, es recomendable usar para los pendolones cables o unirlos con columnas de hormigón

Los vientos huracanados son el mayor problema existen algunos métodos como el que se muestra continuación, se conecta los pendolones que reducen la longitud de pandeo y cambian la frecuencia natural de los pendolones.

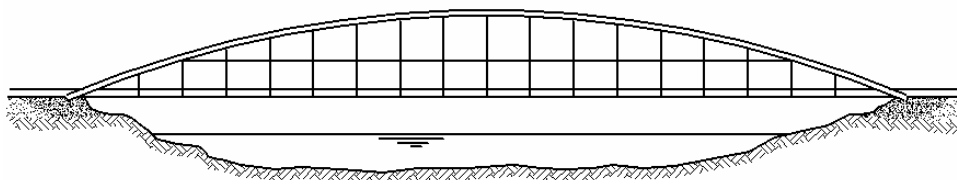


Figura 4.17 Cable horizontal conectando a los pendolones

Otro aspecto importante que debe ser tomado en cuenta es la posibilidad de pandeo del arco que no puede ser ignorado, porque el puente arco esta sujeto a fuerzas axiales elevadas, por

lo cual existe la posibilidad de falla debido al pandeo. Un estudio detallado de este fenómeno puede ser encontrado en el libro *Theory of elastic Stability* de los autores S. P. Timoshenko y J. M. Gere. En la grafica de la *Figura 4.18* esta el coeficiente C para evaluar la fuerza de pandeo.

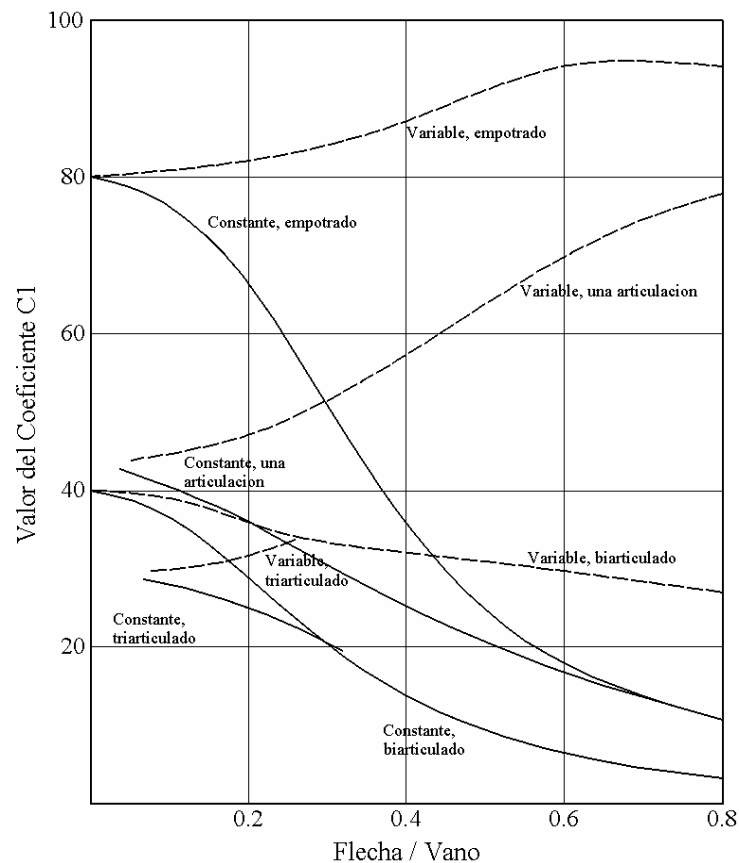


Figura 4.18 Coeficiente de Pandeo

Tomamos un ejemplo para verificar el pandeo en un arco parabólico soportando una carga uniformemente distribuido en proyección horizontal.

Luz arco = 120m.

Flecha = 24 m.

Relación flecha/luz = $24/120=0.2$

Momento de Inercia = $7.6 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$.

Modulo de Elasticidad $E= 2039 \text{ 360 kg/cm}^2$

Fuerza de pandeo horizontal

$$H = C_1 \frac{E \cdot I}{L^2} \quad (4.18)$$

$$H = 28.8 \frac{2039360 * 7.6e10^6}{12000^2} = 3100 \cdot ton$$

Carga uniforme que causa pandeo

$$q = C_2 \frac{EI}{L^3} \quad (4.19)$$

$$C_2 = C_1 \frac{f}{l} 8 = 28.8 * 0.2 * 8 = 46.08$$

$$q = 46.08 \frac{2039360 * 7.6e10^6}{12000^3} = 413.5 \cdot kg / cm$$

$$q = 41350 \cdot kg / m$$

4.10. PUENTES COLGANTES.

Los orígenes de los puentes colgantes son muy antiguos en la historia. Los puentes colgantes primitivos son los ancestros de los puentes colgantes modernos. Los puentes colgantes han sido contruidos en China con cadenas y hierro hace más de 2000 años atrás y también en la india. Los puentes colgantes de hierro se asume que han sido originados en el oriente, aparecen en Europa en el siglo XVI y fueron desarrollados en el siglo XVIII. Un rápido incremento de la dimensión del vano central ocurrió a mediados del siglo XIX impulsado por la invención del acero. Hoy en día los puentes colgantes son más usados para puentes de grandes luces.

La evolución de los puentes colgantes modernos comenzó con la gran producción de hierro. El puente Jacobs Creek fue construido por Finley en U.S.A. en el año 1801 cuyo vano central tenía 203 m., el hecho que distingue a este puente fuera la adopción de una viga de celosía el cual le dio la rigidez al puente y distribuir las cargas a través de pendolones y

evitar la excesiva deformación del cable. La construcción del puente Clifton con vano central de 214 m. es el puente colgante mas viejo en actual servicio para autos, comenzó en 1831, y fue terminado en 1864 en Inglaterra usando cadenas de hierro labrado.

El método de Aerial Spinning fue inventado por Roebling durante la construcción del puente de las Cataratas de Niagara, el cual fue terminado en 1855 con el vano central de 246 m. Esta tecnología fue establecida en le puente Brooklyn terminado el año 1883 el cual tiene un vano central de 486 m., fue el primero en usar cables de acero. El primer puente con vano central mayor a 1000 m. fue le puente George Washington que cruza el río Hudson en Nueva York fue terminado el año 1931 con un vano central de 1067 m.; en 1937 entra en funcionamiento el puente Golden Gate en la bahía de San Francisco con un vano central de 1280 m.

En 1940 el puente Tacoma Narrows, con un vano central de 853 m. era el tercero más grande del mundo en ese tiempo, mostró oscilaciones de modo flector de mas de 8.5 m. y subsecuente modo torsional de vibración. Colapso bajo la acción de un viento de 19 m/s después de cuatro meses de su entrega.



Figura 4.19 Fotografía del primer puente Tacoma Narrows

En la *Figura 4.19* se puede ver el colapso del puente, a pocos minutos después que la primera pieza de concreto cayera se rompieron 600 pies de la plataforma en el tramo en suspecion, note como la plataforma es torcionada, la figura cuadrada que va cayendo (cerca del centro de la fotografía) es de aproximadamente 25 pies (7.6m) de concreto, se puede notar también un automóvil en la parte superior derecha. Con este accidente se volvió crucial el diseño resistente a acciones de viento para los puentes colgantes. Este puente fue rigidizado con vigas I, fue reconstruido en 1950 con la misma longitud de vano, usando una viga rigidizadora del tipo-celosía.

En 1964 el puente Vezerrano Narrows fue librado al servicio con un vano central de 1298 m. fue el vano record por 17 años. También en Portugal mencionamos el puente 25 de Abril terminado en 1966, tiene un vano central de 1013 m. En Inglaterra fue construido con vigas cajón y péndolas diagonales en 1966, el puente Severn con un vano central de 988 m., este diseño revoluciono la tecnología de los puentes colgantes usando vigas cajón. Fue construido en Dinamarca en 1998 el puente Gran Cinturón Este con un vano central de 1624 m.

En china se tiene el puente Tsing Ma con 1377 m. de vano central terminado el año 1997, que tiene un gran aporte en la aerodinámica de los puentes colgantes, sigue con esta eficiencia el puente Jing Yin Yangtze con un vano central de 1385 m. terminado en 1999.

El puente Akashi Kaikyo terminado en 1998 es el record actual de vano central de 1991 m., este puente representa la acumulación de la tecnología en la construcción de puentes en nuestros días.

4.10.1. Sistema estructural.

Los componentes estructurales básicos de un sistema de puente colgante son:

- a) Vigas rigidizantes.- estructuras longitudinales las cuales distribuyen y soportan las cargas móviles vehiculares, transmite estos esfuerzos a las péndolas para el sistema lateral y la seguridad de la estabilidad aerodinámica de la estructura
- b) Cables Principales.- Un grupo Paralelo de cables el cual soporta las vigas rigidizantes por los pendolones y transfieren la carga a la torre.

- c) Torres Principales.- Estructura intermedia principal el cual soporta los cables principales y transfiere cargas del puente a las fundaciones.
- d) Anclajes.- Son bloques macizos de concreto en el que se anclan los cables principales y funciona como soporte final de la estructura.

4.10.2. Tipos de Puentes Colgantes.

Los puentes colgantes pueden ser clasificados por el numero de vanos, continuidad de las vigas rigidizantes, tipos de suspensión de los pendolones, tipos de anclaje de cables.

- a) Numero de Vanos.- Los puentes colgantes pueden ser clasificados en vano simple, dos o tres vanos con 2 torres y puentes colgantes multivano los cuales pueden tener tres o mas torres. Los puentes colgantes de tres vanos son los más comunes. En puentes colgantes multivano, el desplazamiento horizontal de la punta de la torre se incrementa debido a las condiciones de carga, pero es necesario limitar este desplazamiento.

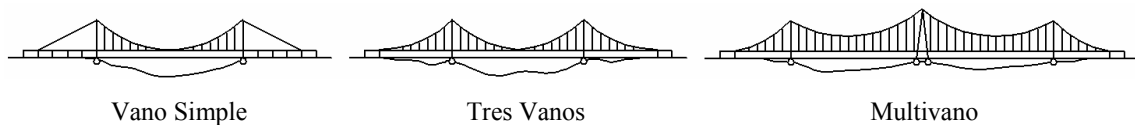


Figura 4.20 Tipos de puentes Colgantes

- b) Continuidad de Vigas Rigidizantes.- Las vigas rigidizantes pueden ser clasificados en dos-rotulas o continuos.

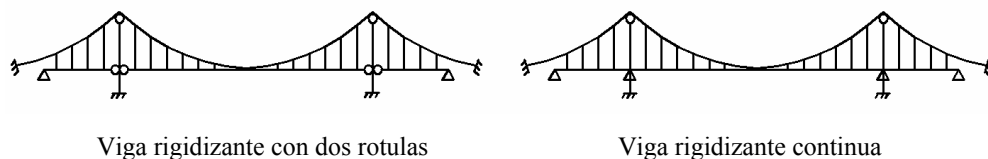


Figura 4.21 Tipos de vigas rigidizantes

Las vigas rigidizantes de dos-rotulas son comúnmente utilizadas para puentes de carretera. Para una combinación de puente vehicular y de trenes se escoge una viga continua para asegurar la transitividad del tren.

- c) Tipos de Suspensión. Los pendolones o son verticales o diagonales, generalmente son verticales, los pendolones diagonales han sido usados como en le puente Severn para incrementar la amortiguación de la estructura colgante. Ocasionalmente se combinan pendolones verticales y diagonales para mayor rigidez.

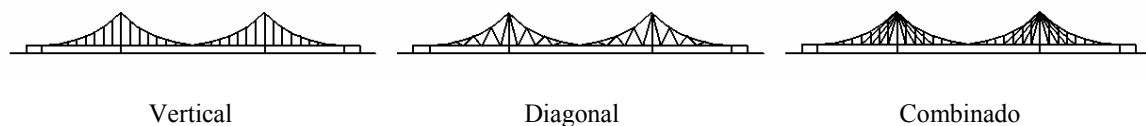


Figura 4.22 Tipos de pendolones

- d) Tipos de anclaje de cables.- Estos son clasificados en anclajes externos o auto anclajes. Los anclajes externos son más comunes. El auto anclaje de los cables principales son fijados a las vigas rigidizantes en vez del bloque de anclaje, la compresión axial es transmitida a las vigas.

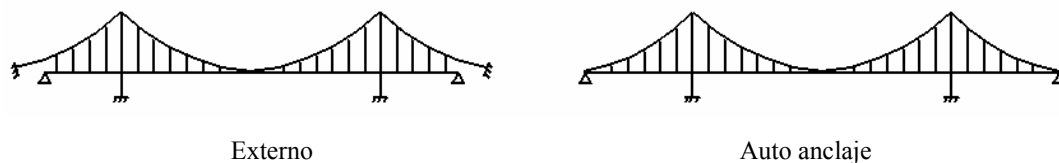


Figura 4.23 Tipos de anclaje

4.10.3. Diseño.

El primero en considerar la solución de un puente colgante fue Navier en 1823, luego Rankine, Melan, Ritter en 1877, Levy en 1886. El puente de Manhathan fue diseñado por Moisselff usando la teoría de la deflexión en 1909, esta teoría se volvió la técnica de diseño usual para otros puentes colgantes de gran luz y los cuales fueron construidos con éxito. Pero el rápido desarrollo de las computadoras y los estudios sobre problemas no lineales del análisis matricial, la teoría de la deformación finita con un modelo de estructura unidimensional es usado generalmente en el análisis de puentes colgantes Brotton fue el primero en analizar puentes colgantes con análisis matricial en 1966 para el puente Severn con buenos resultados.

4.10.3.1. Métodos Analíticos Teoría Clásica.

Se utiliza la Teoría Elástica y la Teoría de la deflexión, estas dos teorías son análisis en el plano para el sistema global del puente colgante. En estas teorías el puente colgante se asume como un cuerpo continuo, y los pendolones tienen un espaciamiento pequeño. Ambos métodos analíticos asumen que:

- El cable es completamente flexible
- La viga rigidizante es horizontal y recto. El momento de inercia es constante.
- La carga muerta de la viga rigidizante y el cable es uniforme.
- Las coordenadas del cable son parabólicas.
- Todas las cargas muertas son tomadas por los cables.

La diferencia entre las dos teorías es que la deformación resultante de la carga viva es considerada por la teoría de la deflexión. En la *Figura 4.24* se muestra fuerzas y deflexiones, debidos a la carga en un puente colgante.

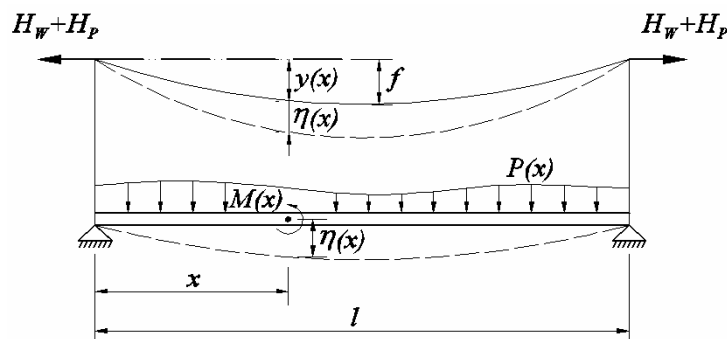


Figura 4.24 Fuerzas y deformaciones en un puente colgante

El momento de flexión $M(x)$ de la viga rigidizante después de cargarlo con la carga viva es como sigue.

Teoría elástica

$$M(x) = M_0(x) - H_P \cdot y(x) \quad (4.20)$$

Teoría de la deformación

$$M(x) = M_0(x) - H_P \cdot y(x) - (H_W + H_P) \cdot \eta(x) \quad (4.21)$$

Donde $M_0(x)$ = Momento de flexión resultante de la carga viva aplicada a una viga simplemente apoyada de la misma longitud de vano que la viga rigidizante.

$\eta(x)$ = Deformación de deflexión del cable y de la viga rigidizante debido a la carga viva

$y(x)$ = abscisa del cable

H_W, H_P = Tensión horizontal del cable debido a la carga muerta y la carga viva respectivamente.

o

Se debe entender que el momento de flexión de la viga rigidizadora es reducido porque la deflexión inducida debido a la carga viva es considerada en el último producto de la ecuación 4.21. Desde que la teoría de deflexión es un análisis no lineal, el principio de superposición usando las líneas de influencia no puede ser aplicado. Sin embargo porque la intensidad de las cargas vivas es mas pequeño que de las cargas muertas para vanos de grandes luces de puentes colgantes, se puede obtener suficiente exactitud si es que se asume que $H_W + H_P$ es constante bajo la condición de que $H_W \gg H_P$.

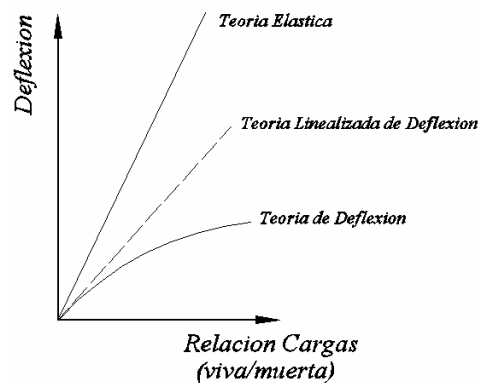


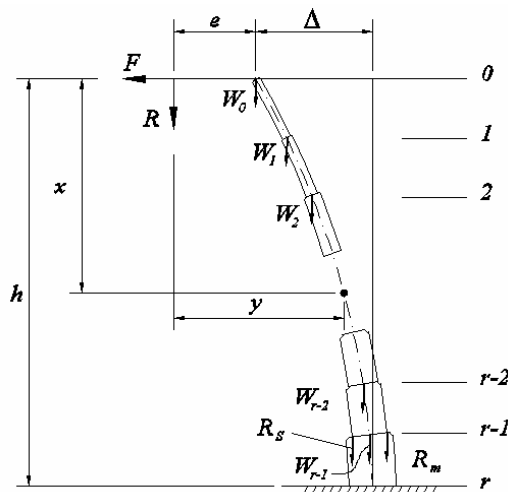
Figura 4.25 Relación Deflexión – Carga entre teorías

En la *Figura 4.25* se puede ver las diferentes teorías. Cuando la relación de la carga viva a la carga muerta es pequeña, la teoría linealizada es especialmente efectiva para el análisis.

En la teoría de la deflexión la rigidez de flexión de las torres puede ser despreciada porque no es significativa para el comportamiento de todo el puente.

a. Análisis fuera del plano debido a las cargas horizontales.- Las fuerzas laterales causados por el viento o terremoto son transmitidas de la viga rigidizante a los cables principales, las vigas tienen grandes deformaciones laterales en comparación de los cables principales debido a la diferencia de las cargas horizontales y a sus rigideces. El primero en establecer este efecto de análisis fuera del plano fue Morssellff.

b. Análisis fuera del plano de la torre principal.- Birdsall propuso una teoría sobre un comportamiento de la torre principal en la dirección longitudinal. La teoría de Birdsall utiliza ecuaciones de equilibrio para la torre debido a las fuerzas verticales y horizontales provenientes del cable actuando en la punta de la torre. La torre es considerada como una viga en voladizo con secciones transversales variables como se indica en la *Figura 4.26*.



F : Carga deseada en la punta de la torre.

R : Carga externa vertical sobre la punta de la torre.

e : Excentricidad de R con respecto al centro de la punta de la torre.

Δ : Deflexión requerida de la punta de la torre.

W_0, W_1, \dots, W_{r-1} : Pesos parciales de la torre, se asume que son concentrados en los puntos del panel.

R_s, R_m : Reacciones sobre la torre a nivel de la rodadura.

Figura 4.26 Modelo analítico de la torre principal

4.10.3.2. Método de Diseño Moderno Método de la Deformación Finita.

Este método es usado en la actualidad para el calculo bidimensional y tridimensional de la estructura completa del puente colgante, con este método se toma en cuenta la elongación de los pendolones, también se analizan los puentes colgantes con pendolones inclinados, tales como el puente Severn, como las etapas constructivas pueden tomarse en cuenta cuando la relación entre fuerza y deformación de los nodos de elementos es no lineal en la teoría de deformaciones finitas, se usa la teoría de las deformaciones linealizadas, cargas excéntricas verticales, análisis fuera del plano, porque la no linealidad geométrica puede ser considerado como relativamente pequeño en estos casos.

Dentro del método de diseño moderno de puentes colgantes se debe tener las siguientes consideraciones.

a. Pandeo elástico y análisis de vibraciones.- El análisis del pandeo elástico es usado para determinar la longitud efectiva de pandeo que es necesario en el diseño de los miembros en compresión tales como la torre principal. El análisis de vibración del puente en su conjunto es necesario para determinar las frecuencias naturales, como parte del diseño de viento y resistencia sísmica.

b. Cargas de diseño.- En el diseño de puentes colgantes es importante la consideración del peso propio muerto, por que esta carga domina las fuerzas sobre las componentes principales del puente, la seguridad contra vientos fuertes y terremotos es muy importante en puente colgantes de grandes luces.

1. En el caso del viento, las consideraciones de la vibración y características aerodinámicas son extremadamente importantes.
2. En el caso de terremotos, asumir la magnitud del terremoto y la evaluación de la energía contenida son cruciales en lugares propensos a estos sucesos.
3. Las otras cargas incluyen efectos debidos a errores de fabricación y erección de miembros, cambios de temperatura y posibles descensos de apoyo.

c. Procedimiento de Análisis.- El procedimiento general usado para el diseño de un puente colgante moderno es como sigue:

1. **Selección de la configuración inicial.-** La longitud del vano, flecha son determinados, la relación flecha / vano es 1/10 para el vano principal y 1/30 para los vanos laterales, la carga muerta y rigidez son asumidos.
2. **Modelo de Análisis Estructural.-** En el caso de análisis en el plano, las fuerzas actuales y deformaciones sobre los miembros bajo carga viva se obtienen con la teoría de las deformaciones finitas de modelo bidimensional. En el caso de análisis fuera del plano provocado por fuerzas de viento, son calculados usando la teoría de deformación lineal con un modelo tridimensional.
3. **Análisis de respuesta dinámica.-** La respuesta de terremoto son calculados usando la respuesta espectral o el análisis del time-history.
4. **Diseño de miembros.-** Los cables y vigas son diseñados usando las fuerzas obtenidas del análisis previo. Las secciones de los cables son diseñados con factor de seguridad de 2.5 como en el caso del puente Verrazano Narrows; en el Akashi Kaikyo se uso un factor de 2.2, el cable principal tiene una fatiga de fluencia de 18000 Kg/cm^2 la fatiga admisible de 8200 Kg/cm^2 .
5. **Análisis de las torres.-** Las torres son analizadas usando cargas y deflexiones, los cuales son determinados del análisis global de la estructura descrito previamente.
6. **Verificación de los valores asumidos y estabilidad aerodinámica.-** Los valores iniciales asumidos para carga muerta y rigidez deben ser verificados que sean lo suficientemente próximos a los obtenidos del análisis de detalle la estabilidad aerodinámica debe ser investigada a través de análisis o pruebas en túneles de viento. La escala del modelo es generalmente 1/100. En el puente Tsing Ma terminado el año 1997 se adopto un estabilizador aerodinámico a cada lado de la viga de forma longitudinal que resulto tener un excelente desempeño como dissipador de la fuerza del viento, este mismo tiene la siguiente forma.

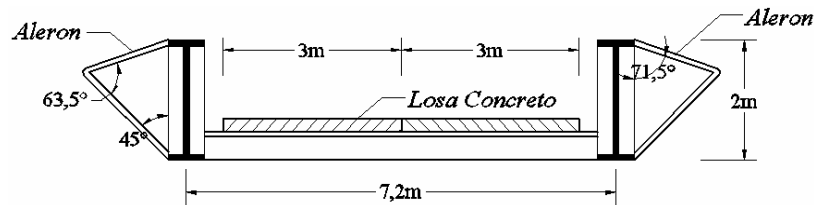


Figura 4.27 Estabilizador Aerodinámico

4.11. PUENTES ATIRANTADOS

Diferentes variantes se han desarrollado previamente a este tipo de puente, pero desde el año 1955 que se terminó este tipo de puente en Suecia se han desarrollado más. Se dice que para vanos de 1000 m, este tipo de puente es el más económico.

El concepto de un puente atirantado es simple. El puente soporta las cargas principales de dirección vertical actuando en las vigas.

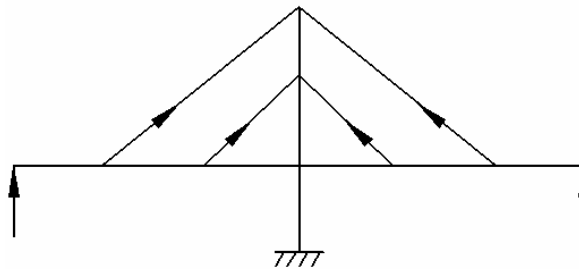


Figura 4. 28 Concepto de funcionamiento de un puente atirantado

Los cables atirantados proporcionan apoyos intermedios para las vigas, esto hace que se tengan vanos largos. La forma estructural básica de un puente atirantado es una serie de triángulos sobrepuestos que comprimen la pila o torre, tensionando los cables y comprimiendo las vigas. Como se puede apreciar en estos miembros predomina la fuerza axial. Los miembros cargados axialmente son más eficientes que los miembros sometidos a flexión. Este hecho contribuye a la economía del puente atirantado.

El puente Stromsund de Suecia con un vano principal de 188 m es reconocido como el primer puente atirantado del mundo algunos otros puentes dignos de mención son el puente Normandíe de Francia con vano de 856 m terminado en 1994, el puente Yan Pu en China con 602 m de vano principal 1993 y el record mundial actual es el puente Tatara en el Japón con 890 m de vano, entregado al servicio en 1998.

4.11.1. Configuración.

Al principio, la idea del puente atirantado, fue el uso del cable atirantado para reemplazar las pilas como soportes intermedios para la viga, con esto se podía tener vanos de gran luz.

El comportamiento de una viga soportada por un cable atirantado puede ser simulado aproximadamente como una viga sobre apoyos elásticos. El momento de flexión en la viga par una carga específica puede considerarse como una componente local y una componente global. El momento de flexión local entre cables es proporcional al cuadrado del espaciamiento. El momento de flexión global de una viga sobre apoyos estáticos es aproximadamente.

$$M = a \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (4.22)$$

Donde a = Coeficiente que depende del tipo de carga

p = carga

I = Momento de inercia de la viga

k = Valor del apoyo elástico en función de la rigidez del cable

El momento global decrece como la rigidez de la viga también decrece.

Considerando que la función de los cables es soportar las cargas de al viga del puente, la cantidad de cables requeridos para un puente es prácticamente el mismo independiente del numero de cables o espaciamiento. Como se indica en la *Figura 4.29*, si el espaciamiento del cable es reducido, los momentos de flexión entre cables son también pequeños. Una reducción de momento local hace que la viga sea más flexible, una viga flexible tiene menos momento global. Consecuentemente una viga muy flexible puede ser usada con cables poco separados en muchos puentes atirantados modernos.



Figura 4. 29 Fuerzas de Cable en relación de la carga sobre la viga

El puente Talmadge con un vano de 335 m tiene una altura de viga de 1.45 m. El puente ALRT Skytrain (Canadá) para un vano de 340 m, tiene una altura de viga de 1.10 m y el puente Portsmouth tiene una viga de 0.84 m de altura para un vano de 280 m.

A causa de que la viga es muy flexible, se hace interrogante la estabilidad de pandeo.

La carga de pandeo crítico de acuerdo a Tang, usando el método de la energía es:

$$P_{(cr)} = \frac{\int E \cdot I \cdot w'^2 \cdot ds + \sum E \cdot C \cdot A_c \cdot L_c}{\int \frac{P_s}{P_c} \cdot w'^2 \cdot ds} \quad (4.23)$$

Donde

- E = modulo de Elasticidad
- I = inercia
- A = Area
- L = longitud del vano
- w = deflexión
- $(')$ = derivada con respecto a la longitudes

La carga de pandeo depende mas de la rigidez del cable que de la rigidez de al viga. Teóricamente, aunque la rigidez de la viga sea despreciable, un puente atirantando debe permanecer estable en muchos casos. La experiencia demuestra que para la viga más flexible la carga crítica contra el pandeo elástico es 400 % mas que las cargas que actúan en el puente.

Los recientes diseños adoptan espaciamientos pequeños entre cables. Es usual el requerimiento de que un cable puede destensionarse, desmantelarse y ser reemplazado bajo

una reducida carga de tráfico. El momento adicional de flexión en la viga no se incrementa excesivamente si el espaciamiento del cable es pequeño.

La complejidad de un análisis se incrementa con el aumento en número de cables, para resolver este problema la computadora es una herramienta de gran ayuda.

Las configuraciones de los cables pueden ser en arpa, en abanico o radial, la configuración de los cables no tiene mayor efecto sobre el comportamiento del puente.

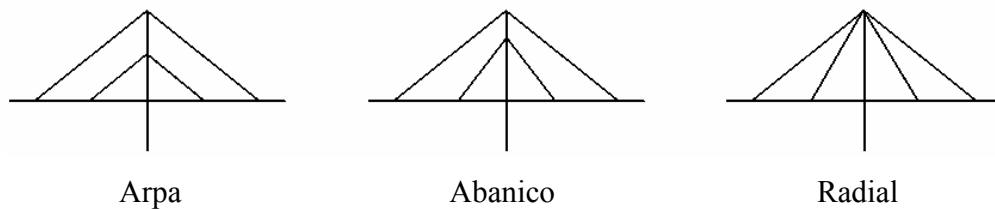


Figura 4.30 configuración de cables

4.11.2. Cables

Los cables son los elementos más importantes de un puente atirantado. Ellos soportan la carga de la viga y transfieren a la torre y nuevamente el anclaje del cable.

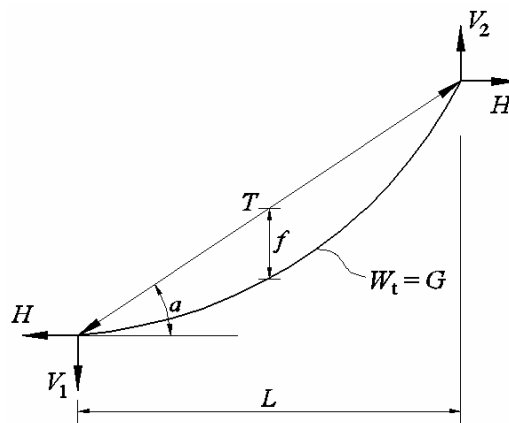


Figura 4.31 Cable inclinado

Los cables en un puente atirantado son todos inclinados. La rigidez real de un cable inclinado varía con la inclinación del ángulo α , el peso total del cable G y de la fuerza de tensión del cable T .

$$E \cdot A_{(eff)} = \frac{E \cdot A}{\frac{1 + G^2 \cdot E \cdot A \cdot \cos^2 a}{12 \cdot T^3}} \quad (4.24)$$

Donde E = Modulo de Elasticidad

A = Área

Si la tensión T del cable cambia de T_1 a T_2 , la rigidez equivale del cable es.

$$E \cdot A_{(eff)} = \frac{E \cdot A}{\frac{1 + G^2 \cdot E \cdot A \cdot \cos^2 a \cdot (T_1 + T_2)}{24 \cdot T_1^2 \cdot T_2^2}} \quad (4.25)$$

La tensión del cable es un 40% de su tensión de fluencia bajo condiciones de carga permanentes. Para condiciones de carga viva y muerta es recomendable usar como tensión admisible un 45% de la tensión de fluencia. Es prudente notar que la tensión admisible de un cable debe considerar muchos factores, siendo el más importante la tensión de ensamblaje de anclaje el punto más débil en un cable con respecto a su comportamiento de fatiga. Por lo tanto el elemento más importante en un cable es el anclaje, el socket Hi-Am que es una cáscara de acero ha tenido un excelente comportamiento.

4.11.3 Viga

Los puentes atirantados han tenido dos mayores desarrollos, la construcción vaciado en sitio y el prefabricado, al principio se utilizaron vigas cajón, luego se han ejecutado con secciones simples, tanto técnica y económicamente son factibles. También se utilizan tableros de puentes ortotrópicos con losa de hormigón y vigas de acero.

4.11.4. Torres

Las torres son los elementos más visibles de puentes atirantados, por lo cual las consideraciones estéticas en el diseño son muy importantes. El enorme tamaño de la estructura hace preferible una clara y simple configuración; las torres son de concreto, porque la torre es un miembro sometido a esfuerzos de compresión, los anclajes de los

cables en la parte alta de la torres pueden ser de tres tipos; cruzado, anclaje muerto y cojinete.

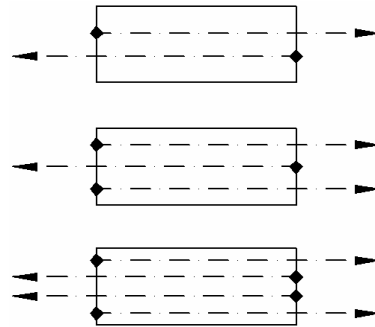


Figura 4.32 Cables cruzados en la torre

4.11.5. Diseño

- a) **Carga permanente.-** un puente atirantado es una estructura hiperestática. En su diseño es muy importante la condición de cargas permanentes, se deben tomar en cuenta los estados de carga de la etapa constructiva.
- b) **Carga viva.** Las tensiones deben ser evaluadas a partir de las líneas de influencia, sin embargo la tensión sobre un punto cualquiera de un puente atirantado es usualmente una combinación de varios componentes de fuerza, la tensión f de un punto inferior del anclaje del tablero esta expresado como

$$f = \frac{I}{A} \cdot p + \frac{y}{I} \cdot M + C \cdot k \quad (4.26)$$

Donde A = Área de la sección transversal

I = Inercia

y = Distancia del eje neutro al punto considerado

C = Coeficiente de influencia de tensión debido a la fuerza k del cable anclado en la cercanía

p = Fuerza axial

M = Momento de flexión

La ecuación anterior puede ser escrita como.

$$f = a_1 \cdot p + a_2 \cdot M + a_3 \cdot k \quad (4.27)$$

Donde las constantes a_1 , a_2 , a_3 dependen del ancho efectivo, localización del punto y configuración geométrica global y local. Bajo la carga viva los términos p , M y k son líneas de influencia individuales.

- c) **Efectos térmicos.** Deben tomarse en cuenta la diferencia de temperatura entre los cables y el resto de los elementos del puente. Los cables negros atraen más calor y mas rápido que la torre y la viga creando una diferencia significativa de temperatura, los colores claros sobre los cables son preferibles.
- d) **Cargas dinámicas.** Las cargas dinámicas mas importantes son las sísmicas y aerodinámicas que dependen mucho de los tipos de apoyo. Para la estabilidad aerodinámica se necesita un puente rígido, pero para efectos sísmicos se prefiere una estructura flexible para tener una respuesta de menores desplazamientos. La respuesta debe ser hallada para satisfacer estos dos requisitos.

4.12. ANÁLISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE PUENTE

En los años recientes, el análisis no lineal de puentes ha ganado un gran espacio, por la necesidad de un comportamiento inelástico bajo cargas de sismo. La filosofía común para el diseño sísmico ordinario de un puente es que este sufra un grado de daño sin colapsarse. Es requerido un control y evaluación del daño con un análisis no lineal post-elástico. Un análisis no lineal es complejo y envuelve muchas simplificaciones que se asumen. Los ingenieros deben estar familiarizados con estas complejidades y asunciones para un diseño de un puente tal que el puente sea seguro y económico.

Muchos factores contribuyen al comportamiento no lineal de un puente. Estos factores incluyen consideraciones como la inelasticidad del material, geometrías o efectos de segundo orden, la interacción no lineal del suelo - fundación - estructura, juntas abriendo y cerrando a las rotulas, en la localización de estribos, efectos diferidos debido al

acortamiento y fisuración del concreto, etc. El tema de análisis no lineal es extremadamente extenso no se va a poder cubrir en su totalidad en los posteriores párrafos, se tocarán solamente las no linealidades de material y geométricas, como también algunas formulaciones básicas de un análisis estático no lineal para el caso de sismo.

4.12.1. Clasificación de análisis y lineamiento general.

Los ingenieros usan el análisis estructural como una herramienta fundamental para formular decisiones de diseño. Es importante que los ingenieros tengan acceso a varias y diferentes herramientas de análisis y entender el desarrollo asumido y sus limitaciones. Tal entendimiento es esencial para seleccionar la herramienta apropiada para alcanzar los objetivos del diseño.

La *Figura 4.33* muestra las cargas – desplazamiento lateral con curvas de un pórtico usando varios métodos de análisis estructural.

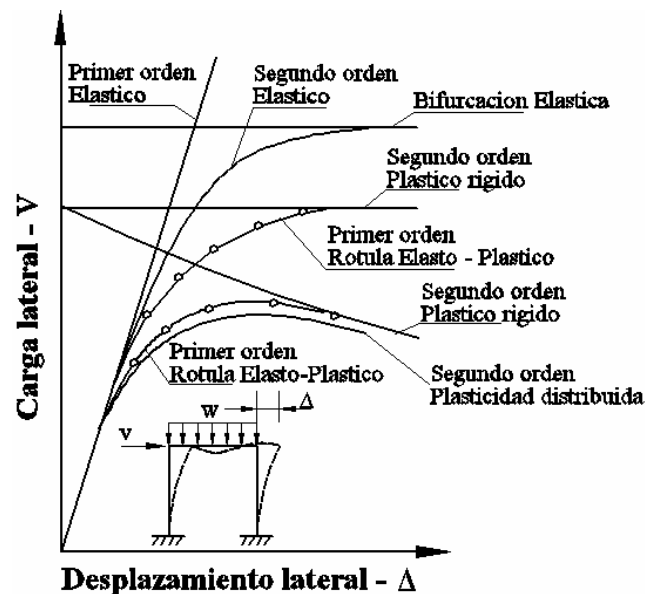


Figura 4.33 curvas de cargas–desplazamiento lateral de un pórtico.

En la siguiente tabla reúne las asunciones básicas de estos métodos.

Método de Análisis Estructural

Método		Relaciones Constitutivas	Formulación de Equilibrio	Compatibilidad Geométrica
1° Orden	Elástico Plástico – rígido Rotula elasto-plástico Plasticidad distribuida	Elástico Plástico – rígido Elástico perfect plástico Inelástico	Geometría Original No deformada	Pequeñas deformaciones Pequeños desplazamientos
2° Orden	Elástico Plástico – rígido Rotula elasto-plástico Plasticidad distribuida	Elástico Plástico – rígido Elástico perfect plástico Inelástico	Geometría Estructura Deformada ($P-\Delta$ y $P-\delta$)	Pequeñas deformaciones y Rotaciones moderadas
Verdadero (Grandes Deformaciones)	Elástico Inelástico	Elástico Inelástico	Geometría de Estructura Deformada	Grandes deformaciones

4.12.1.1. Clasificación.

Los métodos estructurales pueden ser clasificados básicamente en formulaciones de compatibilidad, equilibrio y formulación constitutiva.

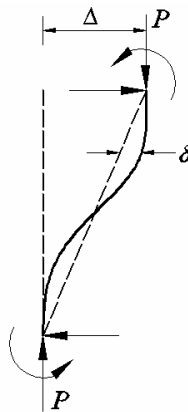


Figura 6.34. Efecto de segundo orden

a. Clasificación basado en la formulación de compatibilidad y equilibrio.

a.1. Análisis de primer orden.- Es un análisis en el cual el equilibrio es formulado con respecto a la geometría no deformada (original) de la estructura. Esta basado en la teoría de las pequeñas deformaciones.

a.2. Análisis de segundo orden.- Es un análisis en el cual el equilibrio es formulado con respecto a la geometría deformada de la estructura. Un análisis de segundo orden usualmente toma en cuenta el efecto $P-\Delta$ (influencia de la carga axial actuando a través del desplazamiento asociado con miembro desplazado) y el efecto $P-\delta$ (influencia de la fuerza axial actuando a través del desplazamiento asociado, de curvatura de flexión), esta basado en pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos de miembros, pero rotaciones moderadas y teoría de grandes desplazamientos.

a.3. Análisis verdadero de grandes deformaciones.- Es un análisis para el cual son tomados en cuenta grandes deformaciones.

b. Clasificación basada en la formulación constitutiva

b.1. Análisis elástico.- Es un análisis en el cual son formulados las ecuaciones constitutivas elásticas.

b.2. Análisis inelástico.- Es un análisis en el cual son formulados las ecuaciones constitutivas inelásticas.

b.3. Análisis rígido-plástico.- En un análisis en el cual son formulados las ecuaciones constitutivas rígido-plásticas.

b.4. Análisis de rotula elasto-plástico.- Un análisis en el cual es tomado en cuenta el material inelástico usando unas rotulas plásticas concentrado de “longitud-cero”.

b.5. Análisis de plasticidad distribuida.- Un análisis en el cual la superficie de plasticidad a través de la sección transversal y a lo largo de la longitud del miembro son modelados explícitamente.

c. Clasificación basada en la formulación matemática.

c.1. Análisis lineal.- Un análisis en el cual las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas son lineales.

c.2. Análisis no lineal.- Un análisis en el cual las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas son no lineales.

4.12.1.2. Lineamiento General.

Los siguientes lineamientos pueden ser usados para seleccionar el tipo de análisis.

- Análisis de primer orden pueden ser adecuados para puentes curvos y de vanos medianos. Un análisis de segundo orden es necesario para puentes de vanos grandes, altos y esbeltos. El análisis de segundo orden verdadero es generalmente innecesario para estructuras de puentes.
- Un análisis elástico es suficiente para el diseño basado en la resistencia del material. El análisis inelástico puede ser usado en el diseño basado en el desplazamiento.
- El efecto de arqueado (efecto de flexión sobre miembros de deformación axial) el efecto de Wagner (efecto de los momentos de flexión y fuerzas axiales a través de desplazamientos asociados con los miembros torsionándose) y el efecto de corte sobre miembros sólidos anchos pueden ser ignorados para muchas estructuras de puentes.
- Para no linealidad del acero, debe tomarse en cuenta la fluencia, deformación de endurecimiento y rotura. Para la no linealidad del concreto, debe usarse una relación completa tensión-deformación (en compresión sobre la última deformación). Debe despreciarse la resistencia a la tracción del concreto.
- Otras no linealidades más importantes son la interacción suelo-fundación-estructura, medios o recursos de modificación de respuesta sísmica (amortiguadores y aisladores sísmicos), conexión flexible, las aberturas por ejemplo de las juntas de dilatación cuando están cerradas y abiertas deben considerarse cuidadosamente.

4.12.2. Formulación de la no linealidad geométrica.

La no linealidad geométrica puede ser considerada en la formulación de las matrices de rigidez de un elemento. La ecuación matricial que relaciona la fuerza-deformación es

$$\{F\} = [K]\{D\} \quad (4.28)$$

Donde $\{F\}$ = Fuerza
 $\{D\}$ = Desplazamiento
 $[K]$ = Matriz de rigidez

Para un elemento unidimensional en el plano es como se muestra en la figura 4.35.

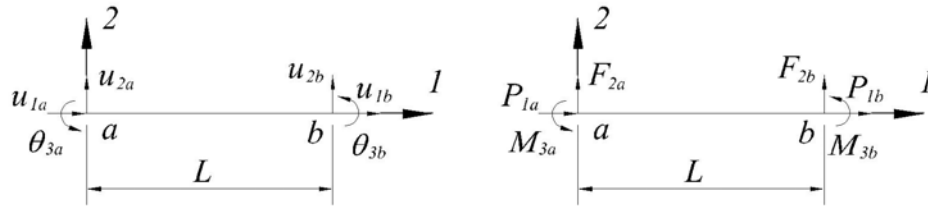


Figura 4.35. Grados de libertad y fuerzas nodales para un elemento unidimensional en el plano

Los vectores de fuerza, desplazamiento se expresan como

$$\{F\} = \{P_{1a}, F_{2a}, M_{3a}, P_{1b}, F_{2b}, M_{3b}\}^T \quad (4.29)$$

$$\{D\} = \{u_{1a}, u_{2a}, \theta_{3a}, u_{1b}, u_{2b}, \theta_{3b}\}^T \quad (4.30)$$

La matriz de rigidez es

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 & -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \phi_1 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \phi_2 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \phi & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \phi_2 \\ 0 & 0 & 4 \cdot \phi_3 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \phi_2 & 2 \cdot \phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \phi & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \cdot \phi_3 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Donde A = Sección transversal (área)
 E = Modulo de Elasticidad
 L = Longitud del miembro

Las funciones ϕ_1, ϕ_2, \dots pueden ser expresadas por ecuaciones de estabilidad. Alternativamente las funciones ϕ_i pueden también expresarse en series de potencia derivados de la solución analítica

ϕ	Compresión	$P=0$	Tensión
ϕ_1	$\frac{(k \cdot L)^3 \text{ Sen } k \cdot L}{12\phi_c}$	0	$\frac{(k \cdot L)^3 \text{ Sen } h k \cdot L}{12\phi_r}$
ϕ_2	$\frac{(k \cdot L)^2 (1 - \text{Cos } k \cdot L)}{6\phi_c}$	0	$\frac{(k \cdot L)^2 (\text{Cos } h k \cdot L - 1)}{6\phi_r}$
ϕ_3	$\frac{(k \cdot L)(\text{Sen } k \cdot L - k \cdot L \text{ Cos } k \cdot L)}{4\phi_c}$	0	$\frac{(k \cdot L)(k \cdot L \text{ Cosh } k \cdot L - \text{Senh } k \cdot L)}{4\phi_r}$
ϕ_4	$\frac{(k \cdot L)(k \cdot L - \text{Sen } k \cdot L)}{2\phi_c}$	0	$\frac{(k \cdot L)(\text{Senh } k \cdot L - k \cdot L)}{2\phi_r}$

Ecuaciones de estabilidad para las funciones ϕ_i

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [\pm (k \cdot L)^2]^n}{12\phi} \\ \phi_2 &= \frac{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} [\pm (k \cdot L)^2]^n}{6\phi} \\ \phi_3 &= \frac{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} [\pm (k \cdot L)^2]^n}{4\phi} \\ \phi_4 &= \frac{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} [\pm (k \cdot L)^2]^n}{2\phi} \\ \phi &= \frac{\frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [\pm (k \cdot L)^2]^n}{2\phi} \end{aligned}$$

Series de potencia para las funciones ϕ_i

Asumiendo las funciones de desplazamiento polinomial el elemento finito basado en la matriz de rigidez tiene la siguiente forma

$$[K] = [Ke] + [Kg] \quad (4.32)$$

Donde $[Ke]$ = Matriz de rigidez elástica convencional de primer orden

$[Kg]$ = Matriz de rigidez geométrica que considera los efectos de carga axial sobre la rigidez de flexión de un miembro

A continuación expresamos las matrices $[Ke]$, $[Kg]$ en el cual el signo menos significa compresión y el signo más tracción.

$$[Ke] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Matriz elástica

$$[Kg] = \pm \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{2L^2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Matriz geométrica

4.12.3. Formulación de no linealidad del comportamiento del material.

Están basados en las relaciones de tensión-deformación, con criterios de investigación de algunos autores tanto para el concreto como para el acero.

4.13. EFECTO DEL IMPACTO DE VEHÍCULOS EN MOVIMIENTO.

Vehículos tales como camiones y trenes pasando puentes a cierta velocidad causan efectos dinámicos entre ellos vibraciones globales y efectos locales de martillo. Las cargas dinámicas para movimiento de vehículos son considerados “impacto” en la ingeniería de puentes por la relativa corta duración. La magnitud de la superficie y características dinámicas del vehículo tales como la velocidad del movimiento, sistema de amortiguación, de distinta forma las cargas de terremoto pueden causar vibración en el puente en las direcciones longitudinal, transversal y vertical, el movimiento de vehículos principalmente excita vibraciones verticales del puente. El efecto del impacto influencia primeramente a la superestructura y algo a los miembros de la subestructura arriba del suelo porque la energía puede disiparse efectivamente en miembros bajo el suelo por el soporte que tienen.

Sin embargo la interacción entre movimiento de vehículos y puentes es mas complejo, los efectos dinámicos de vehículos en movimiento sobre puentes son medidos por asignación de carga dinámica IM sumando a la carga estática viva (LL) en las especificaciones corrientes de diseño de puentes. De acuerdo a las especificaciones de la AASHTO y AREA es dado por

$$IM = \frac{D_{din}}{D_{est}} - 1 \quad (4.35)$$

Donde D_{min} = Respuesta dinámica máxima para deformación, momento o corte de los miembros de la estructura

D_{est} = Respuesta estática máxima

El efecto total de la carga viva LL , puede ser expresado como

$$LL = AF \cdot D_{est} \quad (4.36)$$

$$AF = 1 + IM \quad (4.37)$$

Donde AF = Factor de amplificación representado la amplificación dinámica del efecto de la carga estática
 IM = Factor de impacto determinado por una formula empírica en el código de diseño

Los recientes trabajos de algunos investigadores sobre el comportamiento dinámico de puentes mas propiamente de vehículos en movimiento sobre puentes se han centralizado sobre un recurso analítico modelando el puente como una viga simplemente apoyada o un alosa simplemente apoyada bajo cargas constantes móviles o pulsaciones (modelo de carga móvil). El efecto dinámico bajo diferentes velocidades de la carga móvil y diferentes relaciones de amortiguación fueron estudiados de esto se establece que la velocidad de los vehículos y el periodo fundamental del puente predominan en el comportamiento dinámico de un puente.

Como la mayoría de los puentes se componen de vigas y losas se han analizado este sistema bajo cargas móviles vehiculares son el método de los elementos finitos.

Basados en análisis analíticos y estudios de mediciones de campo; las características de la respuesta dinámica de puentes bajo cargas móviles puede resumirse en los siguientes hechos.

1. Los factores de medición de impacto IM , en puentes carreteros varían significativamente con un promedio de 0.12 con desviación estándar de 0.05 para puentes de vigas I metálicos. Los valores medidos de los factores de impacto son bajos respecto a las especificaciones AASHTO.
2. El factor de impacto se incrementa con la velocidad del vehiculo en muchos casos.
3. El factor de impacto decrece cuando el vano del puente crece.

4. Bajo las condiciones de superficie, la rugosidad de la losa usando las ondulaciones del terminado del piso como parámetro, se considera buen terminado cuando son menores a 1 cm, se considera como “pobre” cuando las ondulaciones son mayores a 4 cm, el factor de impacto se incrementa tremendamente.
5. El factor de impacto decrece cuando los vehículos cruzan en más de una vía, porque la probabilidad de que ocurra la máxima respuesta dinámica al mismo tiempo es pequeña.
6. El impacto sobre las vigas exteriores es mayor que las vigas interiores porque el modo de deformación por torsión de la respuesta dinámica es mayor, en las vigas externas.
7. El primer modo de vibración de un puente es dominante en muchos casos, especialmente para el efecto dinámico en las vigas interiores de un puente simplemente apoyado.

4.13.1. Consideraciones del efecto de Impacto en el diseño de puentes de carreteras.

Los efectos de impacto sobre los puentes ocasionados por el movimiento de los vehículos es influenciado por factores tales como la luz del puente, rigidez, rugosidad de la superficie, la velocidad y el sistema de suspensión del vehículo, el factor de impacto tiene un rango de variación grande, la modelación de estas características es complejo, pero el calculo es bastante simplificado en la practica del análisis de puentes. En general el efecto dinámico es contribuido por dos medios.

- a. El efecto martillo provocado por los ejes del vehículo sobre la superficie que esta rodando, este impacto tiene efecto sobre las juntas de dilatación.
- b. La vibración gomal causada por el movimiento de los vehículos sobre las ondulaciones del pavimento los cuales causan la excitación de resonancia que influencia a los miembros de la superestructura. Una variedad de consideraciones y formulas han sido propuestas para este caso pero no se ha logrado un consenso. En algunos países para los rangos de frecuencia de puentes se han indicado que varían de

1.0 a 5.0 Hz los cuales corresponden a los rangos de frecuencia del sistema de suspensión de camiones. Pero la evaluación de la primera frecuencia de un puente es fundamental para el estado de diseño.

En las especificaciones AASHTO (1996) este impacto es expresado como

$$I = \frac{15.24}{L + 38.1} \leq 30\% \quad L = \text{metros} \quad (4.38)$$

4.14. EFECTOS DE VIENTO SOBRE PUENTES DE GRANDES VANOS.

Los puentes mas sensibles a los efectos de viento son los puentes colgantes y atirantados, un ejemplo muy claro es del puente Tacoma Narrows, a partir del cual se oriento a investigaciones científicas sobre la aerodinámica de puentes, así también muchos puentes han tenido que rigidizarse contra la acción aerodinámica.

4.14.1. Vientos y puentes de gran luz.

El efecto que el viento puede transmitir al puente puede ser obtenido por medio de la intensidad de la turbulencia que es definida como

$$I = \frac{\sigma}{\bar{u}} \quad (4.39)$$

Donde σ = Desviación estándar de los componentes del viento $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$.

\bar{u} = Velocidad principal del viento.

El viento induce a inestabilidad y vibraciones excesivas en puentes de vanos grandes. Es muy duro de juzgar si la estructura falla debido a la inestabilidad o la excesiva vibración inducida a elementos clave. El termino aeroelástico enfatiza sobre el comportamiento de los cuerpos deformados, aerodinámico enfatiza la vibración de cuerpos rígidos. Muchos problemas envuelven los dos, deformación y vibración.

La interacción entre las vibraciones de un puente y viento resultan en dos tipos de fuerzas movimiento-dependiente y movimiento independiente.

La ecuación aerodinámica de movimiento es expresado como

$$[M]\{\dot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(y)\}_{md} + \{F\}_{mi} \quad (4.40)$$

Donde $[M]$ = Matriz de masa

$[C]$ = Matriz de amortiguación

$[K]$ = Matriz de rigidez

$\{y\}$ = Vector de desplazamiento

$\{F(y)\}_{md}$ = Vector de fuerza aerodinámica

$\{F\}_{mi}$ = Vector de fuerza de viento de movimiento independiente

4.14.2. Aeroelasticidad.

La interacción fluido-estructura puede dar lugar a diversos fenómenos que reciben el nombre de aeroelásticos, los cuales pueden tener carácter oscilatorio y ser crecientes en el tiempo, en cuyo caso dan lugar a inestabilidades de carácter aeroelástico. Los fenómenos aeroelásticos más importantes descritos en ingeniería de estructuras según Simiu Scanlan, y Meseguer son:

- Desprendimiento de torbellinos o vortex shedding en terminología inglesa.
- Galope transversal o galloping.
- Galope inducido por una estela o wake galloping.
- Flameo o flutter.
- Bataneo o buffeting.

El fenómeno aeroelástico ocasionado por la generación y desprendimiento de torbellinos o vortex shedding se debe a la separación del flujo del aire por la presencia de un obstáculo, que en ingeniería de puentes será el tablero, y que se caracteriza por el desprendimiento periódico de torbellinos de sentido de rotación alternado llamados vórtices de Von Kármán, que se muestran en la *figura 4.36*.



Figura 4.36. Generación y desprendimiento de vértices de Von Kármán.

El desprendimiento de torbellinos genera unas fuerzas verticales sobre el tablero cuyo sentido se va alternando, las cuales son la causa de las vibraciones verticales típicas de este fenómeno aeroelástico. En la *Figura 4.37* se muestra un esquema de esta situación. Este tipo de vibraciones aparece a bajas velocidades de viento, dando lugar a problemas de servicio exclusivamente. Una particularidad del desprendimiento de torbellinos es el fenómeno de lock-in que se produce cuando la frecuencia a la que se desprenden los torbellinos está próxima a la frecuencia natural de la estructura en la dirección transversal al flujo de aire. En esta situación, el desprendimiento de torbellinos pasa a estar controlado por la frecuencia mecánica y la amplitud de la oscilación es máxima, sin que por ello se alcancen situaciones de inestabilidad.



Figura 4.37. Oscilaciones verticales en un tablero de puente debido al desprendimiento de torbellinos.

Aunque los fenómenos aeroelásticos se han manifestado generalmente en puentes colgantes o atirantados, debido a su gran ligereza, recientemente se ha producido algún caso en puentes de otra tipología, que presentaban también gran flexibilidad. En el caso de vortex shedding merece la pena comentar los movimientos de esta naturaleza que sufre el puente Trans-Tokio Bay Crossing. Se trata de un puente que cruza la bahía de Tokio, el cual consiste en una viga continua en cajón realizada en acero. No se trata, por lo tanto, de un

puente colgante o atirantado. Su longitud total es de 1630 m y los dos vanos de mayor longitud tienen 240 m cada uno, siendo la anchura total de la sección transversal de 22,9 m.

Durante la fase de diseño se realizaron varios ensayos de modelos seccionales en túnel de viento, así como sobre un modelo del puente completo. Estos trabajos experimentales pusieron de manifiesto el previsible desarrollo de vibraciones verticales debido a la generación de torbellinos al tiempo que permitieron descartar la posibilidad de que se produjese el fenómeno de galloping en la estructura.

4.14.3. Metodologías para el estudio de fenómenos Aeroelásticos.

El flameo es el fenómeno de inestabilidad aeroelástica más relevante en puentes de gran vano, las metodologías fundamentales para el estudio del flameo se pueden clasificar en metodología experimental, computacional e híbrida.

a.- Metodología Experimental.

Las pruebas de túneles de viento son comúnmente usados para puentes con “sensibilidad al viento”, como los puentes atirantados, colgantes el objetivo de los túneles de viento es determinar la susceptibilidad de los puentes a varios fenómenos aerodinámicos.

El comportamiento aerodinámico de un puente es controlado por dos tipos de parámetros estructural y aerodinámico. Los parámetros estructurales son la forma del puente, condiciones de contorno, rigidez de los miembros, modos de vibración y frecuencias. Los parámetros aerodinámicos son viento, forma de la sección del puente y detalles.

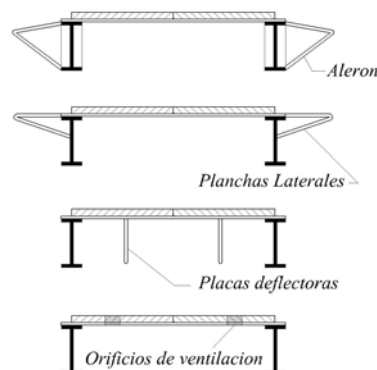


Figura 4.38. Modificaciones típicas aerodinámicas

Algunas modificaciones aerodinámicas mas usadas en puentes para mejorar el desempeño aerodinámico son la adición de dispositivos que permitan el libre paso del viento, algunos de estos fueron mostrados en la *Figura 4.38*.

b.- Metodologia Computacional.

Esta básicamente trata de adaptar los métodos numéricos que han sido desarrollados para otros campos de la mecánica de fluidos a los problemas propios de la ingeniería de puentes.

La razón de ser de estos métodos puramente numéricos radica en el ahorro económico y de tiempo que se lograría si se hiciesen innecesarios los ensayos en túnel de viento. Sin embargo, se debe tener presente que la eficiencia de la metodología numérica está inevitablemente unida a la eficacia de los métodos propuestos y a la gran capacidad de cálculo necesaria para poder aplicar estas técnicas. En la actualidad los resultados obtenidos son todavía limitados.

Los métodos numéricos más utilizados en la dinámica de fluidos computacional son:

- Métodos de volúmenes finitos o Finite Volume Methods.
- Métodos de los elementos finitos o Finite Element Methods.
- Métodos de las diferencias finitas o Finite Difference Methods.
- Métodos de partículas o Particle (vortex) Methods.

c.- Metodologia Híbrida.

Finalmente, la metodología híbrida en el estudio de puentes de gran vano consta de dos etapas: una primera experimental en la que se obtienen las fuerzas aeroelásticas que actúan sobre el tablero mediante la identificación a través de ensayos de unos parámetros denominados coeficientes de flameo, y una segunda etapa en la que se realiza un cálculo dinámico que permite la determinación de los dos parámetros fundamentales que gobiernan el fenómeno del flameo, que son la velocidad crítica y la frecuencia de flameo. Dado que esta segunda metodología combina una primera parte experimental y una segunda computacional, recibe el nombre de híbrida.

CAPITULO 5

TEORIA MEMBRANAL DE LAS CÁSCARAS

5.1. COMPORTAMIENTO Y TEORIAS COMUNES DE CÁSCARAS.

Como ejemplos de cáscaras podemos mencionar alas de aeroplano, recipientes de presión (como las compresoras), tuberías, el fuselaje de los cohetes, misiles, las llantas de vehículos, lámparas incandescentes, tapas, domos de techo y una variedad de contenedores cada uno de estas paredes están curvados. Sin embargo la placa curvada puede ser vista como una porción de cáscara, la ecuación general para cáscaras delgadas también es aplicable a las placas curvadas. Nosotros nos limitaremos al tratamiento de cáscaras con espesor constante, y pequeño en comparación con las otras dos dimensiones. Como en el tratamiento de placas, el plano que limita el espesor de la placa es llamado superficie media. Para describir la forma de la cáscara, nosotros necesitamos conocer solamente la geometría de la superficie media y el espesor de la cáscara en cada punto. Cáscaras de significación teórica son frecuentemente definidos como delgados cuando la relación del radio con el espesor de la misma es igual o menor a 1/20. Para cáscaras de importancia practica, esta relación puede ser 1/1000 o mas pequeño.

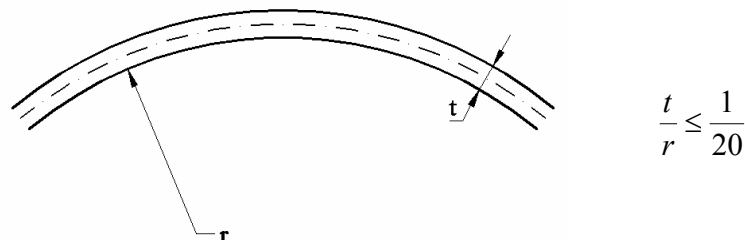


Figura 5.1.- Relación espesor radio

El análisis estructural de cáscaras abarca dos distintas, teorías aplicadas comúnmente, el primero de estos, es la teoría membranar, usualmente aplicado en una gran parte de las cáscaras. Una membrana, cualquiera placa o curvado es identificado como un cuerpo de la misma forma como la placa o cáscara, pero capaz de transmitir momentos o fuerzas de corte. En otras palabras, una membrana es una bidimensional análogo a un cordel flexible con la excepción que este puede resistir compresión.

El segundo la teoría de flexión o teoría general, incluye los efectos de flexión esto permite el tratamiento de discontinuidades en la distribución de tensiones tomando lugar en una región limitada en la vecindad de una carga o discontinuidad estructural, sin embargo, la información relativa a la cáscara y sus tensiones membranales es usualmente de bastante significado practico que el conocimiento de las tensiones de flexión. La teoría membranar simplifica de lejos el cálculo. Para cáscaras delgadas que no tienen cambios drásticos en el espesor, inclinación, o curvatura, las tensiones meridionales son uniformes a través del espesor de la pared. La teoría general de flexión comprende una solución membranar, consiguiendo en aquellas áreas en el cual los efectos de continuidad son pronunciados. El objetivo de esto no es mejorar la solución membranar, pero mejora el análisis de tensiones y deformaciones pertenecientes a las fuerzas de contorno o cargas concentradas, las cuales no tienen una respuesta adecuada solamente con la teoría membranar.

Es importante hacer notar que las fuerzas membranales son independientes de flexión y son completamente definidos por la condición de equilibrio estático. Las propiedades del material no son usados en la deducción de estas fuerzas, la teoría membranar aplicado a todas las cáscaras esta hecho de cualquier material (metal, mampostería, concreto armado, película de jabón, etc.) varias relaciones han sido desarrolladas para la teoria de flexión sin embargo se restringe a cáscaras de materiales homogéneos, elastico e isotropico.



Figura 5.2.- a y b dependencia del equilibrio de las fuerzas membranales con las condiciones de apoyo de una cáscara

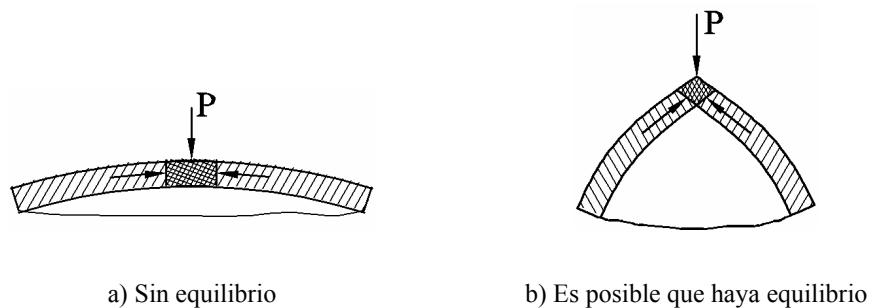


Figura 5.3.- a y b equilibrio de las fuerzas membranales con cargas concentradas

Se asume bases cinemáticas asociados con la deformación de una cáscara delgada en el análisis es usado pequeñas deformaciones que son como sigue:

- 1.- la relación del espesor de la cáscara con el radio de curvatura de la superficie media es pequeño en comparación de la unidad.
- 2.- las deflexiones son pequeñas comparados con el espesor de la cáscara.
- 3.- la reacción plana a través de una cáscara es tomado normal a la superficie media, permaneciendo plano y se hace normal a la deformada a la superficie media después que la cáscara este sometido a flexión. Esta hipótesis implica que las deformaciones $\gamma_{xz}\gamma_{yz}$ son despreciables. La deformación normal ξ_z perteneciente a la carga transversal también puede ser omitida.
- 4.- la tensión normal en la dirección z , σ_z , es despreciable.

Solamente consideraremos cáscaras y cargas para los cuales las tensiones de momento son pequeños despreciables. También se presentaran aplicaciones en el que gobiernan ecuaciones de la teoría membranar para casos específicos prácticos.

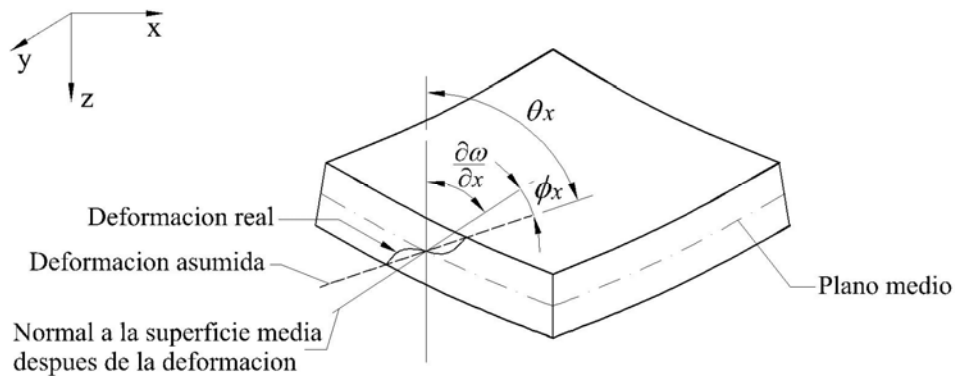


Figura 5.4.- Deformación de flexión

5.1.2. ACCIÓN DE RESISTENCIA DE CARGA DE UNA CÁSCARA.

El comportamiento de deformación común de vigas, placas delgadas, y cáscaras delgadas es ilustrado por lo que se asumió en el anterior párrafo. El mecanismo de cargado de cargas de estos miembros no asemeja uno de otro, sin embargo la acción de resistencia a la carga de una cáscara difiere de los otras formas de estructura porque es notable la extraordinaria capacidad de una cáscara de huevo o un foco su resistencia a las fuerzas normales, a pesar de su espesor y fragilidad, (un huevo de una gallina tiene como radio a lo largo de su eje de revolución $r=20\text{cm}$ y un espesor $t=0.4\text{mm}$; de este modo $(t/r = 1/50)$). El comportamiento de arriba contrasta mercadamente con materiales similares en placas o vigas conFiguradas bajo cargas laterales. Una cáscara, siendo curvada, puede desarrollarse en fuerzas en el plano (metidos) a una forma la acción resistente primaria en adición a estos fuerzas y momentos existentes en una placa o viga.

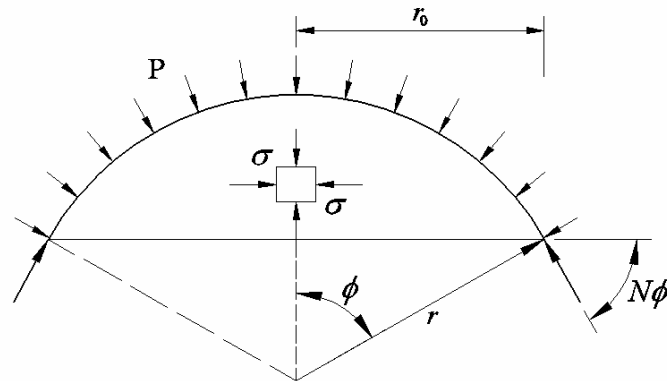


Figura 5.5.- Cáscara esférica sometida a una presión P

Vamos a describir el fenómeno, consideramos una cáscara esférica de radio r y espesor t , sujeto a una presión uniforme de intensidad P , ver *Figura 5.5*. La condición que la suma de las fuerzas verticales es cero es expresado:

$$2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot N \cdot \text{Sen} \phi - P \cdot \pi \cdot r_0^2 = 0$$

$$N = \frac{P \cdot \pi \cdot r_0^2}{2 \pi \cdot r_0 \cdot \text{Sen} \phi} = \frac{P \cdot r_0}{2 \cdot \text{Sen} \phi} \quad r_0 = r \cdot \text{Sen} \phi$$

$$N = \frac{P \cdot r \cdot \text{Sen} \phi}{2 \cdot \text{Sen} \phi} = \frac{P \cdot r}{2}$$

En el cual N es una fuerza en el plano por unidad de circunferencia. Esta relación es válida en cualquier lugar de la cáscara, como N está visto que no varía con ϕ . Podemos notar que, en contraste con el cono de placas, la carga es sustentada por la superficie media.

A sido demostrado que las tensiones de flexión juegan un rol insignificante en la acción de resistir carga. Buscando sobre la simetría de la cáscara y el con el cargado el estado de tensión de un punto, representado por un elemento infinitesimal es como se muestra en la *Figura 5.5*, la dirección del esfuerzo de compresión tiene la forma:

$$\sigma = -\frac{P \cdot r}{2 \cdot t} \quad (a)$$

El esfuerzo normal de una superficie media es despreciable y de este modo la deformación directa, de la ley de Hooke es

$$\xi = \frac{1}{E}(\sigma - \nu \cdot \sigma) = -(1-\nu) \cdot \frac{P \cdot r}{2 \cdot E \cdot t} \quad (b)$$

Asociado con esta deformación, la circunferencia reducida es $2 \cdot \pi \cdot r' = 2 \cdot \pi \cdot (r + r \xi)$, o $r' = r(1 + \xi)$. La variación en curvatura χ (chi) es

$$\chi = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 + \xi} - 1 \right) = -\frac{\xi}{r} \left(\frac{1}{1 + \xi} \right) = -\frac{\xi}{r} (1 - \xi + \xi^2)$$

Despreciando términos de orden superior pertenecientes a sus magnitudes pequeñas e introduciendo en la ecuación (b), la anterior ecuación será

$$\chi = -\frac{\xi}{r} = (1-\nu) \frac{P}{2 \cdot E \cdot t} \quad (c)$$

Una relación para el momento de flexión placa es deducido de sus formulas de placas. Para una cáscara esférica bajo esta consideración tenemos $\chi = \chi_x = \chi_y$. De la ecuación de placas y la ecuación (c) nos guía a

$$M = -D(\chi_x + \nu \chi_y)$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$M = -D \cdot \chi \cdot (1 + \nu) = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{P}{2 \cdot E \cdot t} (1 + \nu) = -D \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{P}{2 \cdot E \cdot t}$$

$$M = -\frac{E \cdot t^3 \cdot (1 - \nu^2)}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{P}{2 \cdot E \cdot t} = -\frac{P \cdot t^2}{24}$$

Dado que el esfuerzo de flexión es dado por

$$\sigma_b = \frac{6 \cdot M}{t^2} = -\frac{6 \cdot P \cdot t^2}{24 \cdot t^2} = -\frac{P}{4} \quad (d)$$

la relación de esfuerzo directo al esfuerzo de flexión es

$$\frac{\sigma}{\sigma_b} = -\frac{P \cdot r / 2t}{P / 4} = \frac{4P \cdot r}{2 \cdot P \cdot t} = \frac{2r}{t} \quad (e)$$

Si observamos los esfuerzos de membrana son mucho mas grandes que los esfuerzos de flexión como $\xi/2r \ll 1$. Podemos concluir que la carga aplicada es resistido predominantemente por los esfuerzos en el plano de la cáscara.

En los análisis efectuados se han tocado solamente la configuración de una cáscara simple sin embargo, las condiciones analizadas con respecto a la acción de aplicación busca de cualquier geometría y carga localizadas fuera de los limites o puntos de aplicación de cargas concentradas. Surgen por asimetrías en carga o forma, esfuerzos de corte y esfuerzos de flexión están presentes. Trataremos en mayor detalle posteriormente en el estado de esfuerzos de membrana en cáscaras de geometría diversa.

Se hace notar que una cáscara delgada puede fallar a un pandeo local bajo fatigas de presión, los problemas de inestabilidad de cáscaras se tratara posteriormente. Para propósitos de referencia, vamos a introducir la siguiente relación siendo para la predicción de fatigas criticas σ_{cr} para deformaciones locales en una cáscara delgada

$$\sigma_{cr} = k \frac{E \cdot t}{a} \quad (f)$$

Aquí E es el modulo de elasticidad, y el valor de la constante k puede determinarse por un análisis racional, como se describe en capitulos posteriores y es incorporado con un factor empírico en orden a los valores técnicos probados actualmente. El valor de $k \approx 0.25$ es usado frecuentemente.

Consideremos por ejemplo una cáscara de mampostería de concreto con $E=210000 \text{ kg/cm}^2$ y $t/a = 1/500$, tenemos

$$\sigma_{cr} = 0.25 \cdot 210000 \cdot \frac{1}{500} = 105 \cdot \text{kg/cm}^2$$

Este comparado con la resistencia ultima del concreto de 210 kg/cm^2 , demostramos la importancia del análisis de deformación (normales) en la predicción de la carga admisible.

Estructuras de cáscara deben verificarse para la posibilidad de deformación (normales) en áreas comprimidas como para fatigas de fluencia o roturas en estas relaciones sujetas a fuerzas de tensión.

5.1.3. Geometría de las Cáscaras de Revolución.

Consideramos un tipo particular de cáscara descrito por una superficie de revolución (*Figura 5.6*) el ejemplo incluye la esfera, cilindro y cono. Esta superficie media de cáscara de revolución es generada por rotación llamada curva meridiana alrededor de un eje que corta al plano de la curva. La *Figura 5.6* muestra que un punto sobre la cáscara es convenientemente localizado por las coordenadas θ , ϕ , r_0 y que el elemento de superficie $ABCD$ es definido por dos meridianos y dos círculos paralelos.

Los planos asociados con los radios principales de curvatura r_1 y r_2 de algún punto de la superficie media de la cáscara son el plano meridiano y el plano paralelo del punto en cuestión, respectivamente. Los radios de curvatura r_1 y r_2 describen los lados CD y AC . El radio principal r_2 genera la superficie de la cáscara en la dirección perpendicular a la dirección de la tangente a la curva meridiana. Los dos radios r_0 y r_2 tienen relación puesto que como $r_0 = r_2 \cdot \text{Sen} \phi$ (*Figura 5.6*), las longitudes curbineas del elemento cáscara son

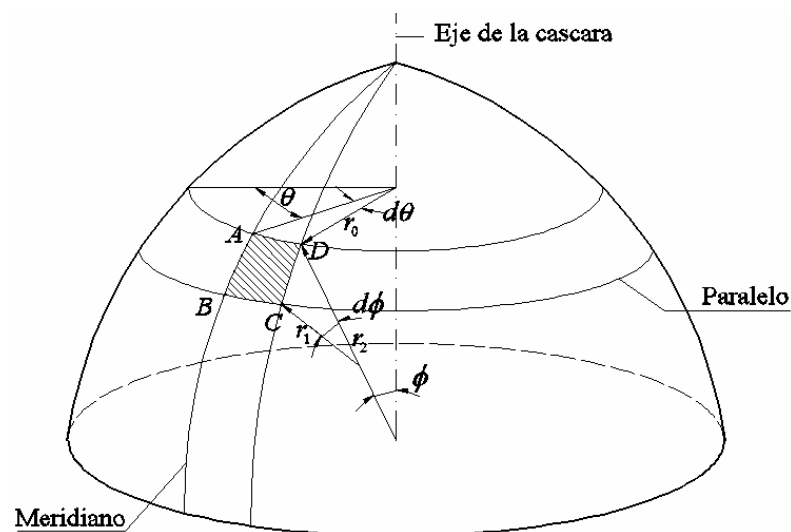


Figura 5.6.- Cáscara de revolución

Se asume en la descripción de arriba que los radios principales de curvatura de la cáscara r_1 y r_2 son considerados constantes. En el cono de radio de curvatura el cual sería de un punto a otro, el radio es computado aplicando la ecuación el cual define la forma de la cáscara, a

lo largo con varias relaciones de geometría diferencial de una superficie como se ilustra en el ejemplo posterior.

5.1.4. Cáscaras de Revolución Simétricamente Cargadas.

En problemas axisimétricos envolviendo cáscaras de revolución, no existen fuerzas de corte y ellos solamente tienen dos fuerzas de membrana por unidad de longitud, N_θ y N_ϕ desconocidos. Las ecuaciones que gobiernan para estas fuerzas son deducidas de dos condiciones de equilibrio. La *Figura 5.7a* y *5.7b* muestran dos diferentes vistas del elemento *ABCD* cortado de la cáscara de la *Figura 5.6*. Prescribiendo por la condición de simetría, las fuerzas de membrana y el cargamento mostrado no varían con θ las fuerzas externas aplicadas por unidad de superficie son representados por los componentes P_y y P_z en los direcciones y y z , respectivamente.

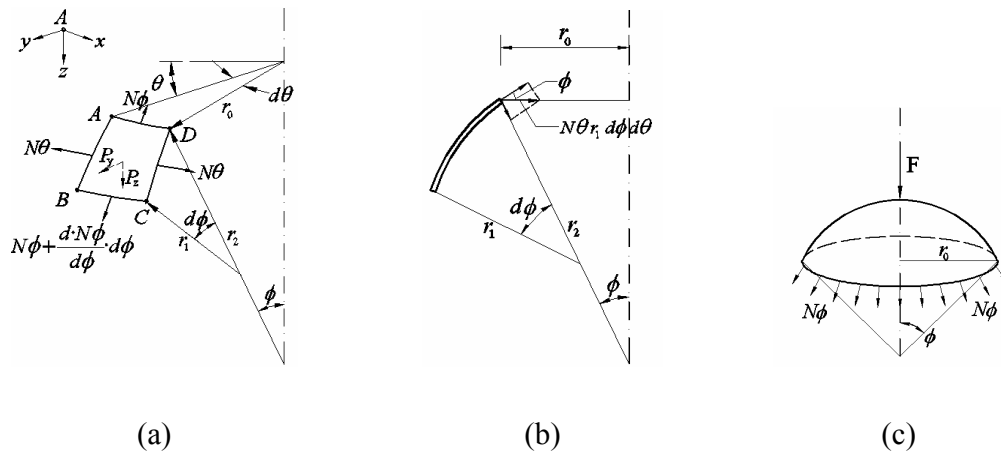


Figura 5.7.- a, b y c cortes de cáscara de revolución

Descripción del equilibrio z requiere que la componente z del cargado como las fuerzas actuando en cada borde del elemento a ser considerado.

La carga distribuida en la dirección z sobre la superficie del área del elemento es

$$\gamma_z \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\phi$$

La fuerza actuando sobre el borde superior del elemento es igual $N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta$, su componente en la dirección z de cada lado es $N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot \text{Sen}(d\phi/2)$, esta fuerza es próxima igual a $N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot d\phi/2$, produciendo la siguiente magnitud de la resultante para ambos bordes:

$$N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Como el área de la sección transversal a lo largo de cada uno de los lados del elemento es $r_1 \cdot d\phi$, la fuerza en estas áreas es $N\theta \cdot r_1 \cdot d\phi$. La resultante en la dirección del radio del plano paralelo para ambas fuerzas es tal $N\theta \cdot r_1 \cdot d\theta$, produciendo la siguiente componente en la dirección z

$$N\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \text{Sen}\phi$$

Para las fuerzas consideradas arriba, de $\sum F_z = 0$, tenemos

$$N\phi \cdot r_0 + N\theta \cdot r_1 \cdot \text{Sen}\phi + P_z \cdot r_0 \cdot r_1 = 0 \quad (a)$$

Esta expresión puede convertirse en una forma simple dividiendo por $r_0 \cdot r_1$ y remplazando r_0 por $r_2 \cdot \text{sen}\phi$. Por el solo hecho, una de las relaciones básicas para cáscaras cargadas axisimetricamente es dado como sigue

$$\frac{N\phi}{r_1} + \frac{N\theta}{r_2} = P_z \quad (5.1a)$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección meridional tangente, que es, en la dirección y es expresado

$$\frac{d}{d\phi} (N\phi \cdot r_0) \cdot d\phi \cdot d\theta - N\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \text{Cos}\phi + P_y \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot r_0 \cdot d\theta = 0 \quad (b)$$

El primer termino representa la suma de las fuerzas normales obtenido sobre los lados AC y BD , mientras que el tercer termino es la componente de carga, el segundo termino de la ecuación (b) es la componente en la dirección y de la fuerza radial resultante $N\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot d\theta$ actuando sobre la cara AB y CD . Dividiendo la ecuación (b) por $d\phi \cdot d\theta$ la ecuación de equilibrio de las fuerzas en la dirección z es ahora

$$\frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0) - N\theta \cdot r_1 \cdot \cos\phi = -P_y \cdot r_1 \cdot r_0 = 0 \quad (5.2)$$

En esto se nota que una ecuación de equilibrio el cual puede ser usado en lugar de la ecuación 5.2 inmediatamente prestando parte de la cáscara interceptado por el ángulo ϕ (Figura 5.7c). Aquí la fuerza F representa la resultante de todas las cargas externas aplicadas al cuerdo libre. Guardando que la condición de simetría, fuerzas $N\phi$ son constantes alrededor del borde. El equilibrio de las fuerzas verticales es además descrito por $2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot N\phi \cdot \text{Sen}\phi + F = 0$ y es

$$N\phi = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \text{Sen}\phi} \quad (5.1b)$$

Verificaremos a continuación que la ecuación 5.1b es una forma alternativa de la ecuación 5.2. Sustituyendo $N\theta$ de la ecuación 5.1a en 5.2 y multiplicando le expresión resultante por $\text{Sen}\phi$ no conduce a

$$\frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0) \cdot \text{Sen}\phi + r_0 N\phi \cdot \cos\phi = r_1 \cdot r_2 \cdot P_z \cdot \cos\phi \cdot \text{Sen}\phi - r_1 \cdot r_2 \cdot \text{Sen}^2\phi$$

Claramente el lado izquierdo de la anterior ecuación puede ser escrita

$$\frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0 \cdot \text{Sen}\phi) = \frac{d}{d\phi}(r_2 \cdot N\phi \cdot \text{Sen}^2\phi)$$

y la fuerza $N\phi$ determinando a través de la integración

$$N\phi = -\frac{1}{r_2 \cdot \text{Sen}^2\phi} \left[\int r_1 \cdot r_2 (P_z \cdot \cos\phi + P_y \cdot \text{Sen}\phi) \cdot \text{Sen}\phi \cdot d\phi + c \right] \quad (c)$$

Aquí la constante c representa el efecto de las cargas las cuales pueden ser aplicadas a un elemento cáscara (Figura 5.7c). De esta forma, introduciendo los valores de $2 \cdot \pi \cdot c = F$, $P_z = P_y = 0$, y $r_0 = r_2 \cdot \text{sen}\phi$ en la ecuación (c), resulta en el valor de $N\phi$, definido por la ecuación 5.1b.

Las ecuaciones 5.1 son suficientes para determinar la llamada fuerza circular $N\theta$ y la fuerza meridional $N\phi$ de los cuales las fatigas son inmediatamente determinadas. El resultado algebraico negativo indica fatigas de compresión.

Porque en su libertad de movimiento en la dirección z , para cargas axisimeticas de cáscaras de revolución consideradas, las deformaciones son producidas tal como las consecuentes en un campo de tensiones y compatibilidad uno con otro.

La acción citada demuestra la diferencia básica entre el problema de una cáscara membranar y una de tensión plana. En el último caso, una ecuación de compatibilidad es requerida. Sin embargo, esta claro que cuando la cáscara esta sujeta a la acción de fuerzas concentradas de superficie o contricciones en los apoyos, la teoría membranar no puede cumplir completamente en cualquier parte las condiciones de deformación. La solución completa es obtenida solamente aplicando la teoría de flexión.

5.1.5. Casos típicos de Cáscaras de Revolución.

Las tensiones de membrana en cualquier cáscara particular cargada axisimeticamente en la forma de una superficie de revolución puede ser determinada de las expresiones que gobiernan el equilibrio desarrollado en la sección precedente. Trataremos en los siguientes párrafos distintas membranas estructurales comunes.

a.- cáscara esférica.- para cáscaras esféricas uno puede tener el radio inferior $a = r_1 = r_2$ de la ecuación 5.1 aparece en la forma

$$N\phi + N\theta = -P_z \cdot a$$
$$N\phi = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \text{Sen}^2 \phi} \quad (5.3)$$

este caso simple de una cáscara esférica sujeto a la sollicitación presión interna constante de gas P_z como en balón. Ahora tenemos $P = P_z$, $\phi = 90^\circ$; y $F = -\pi \cdot a^2 \cdot P$, sin embargo como cualquier sección por medio del centro resulta en un idéntico cuerpo libre, $N\phi = N\theta = N$.

Las acciones, de ecuación 5.3, es de este modo

$$\sigma = \frac{N}{t} = \frac{P \cdot a}{2t} \quad (5.4)$$

donde t es el espesor de la cáscara. La expansión de la esfera, aplicando la ley de Hooke, es tal.

$$\sigma_s = \frac{a}{E \cdot t} (N - \nu \cdot N) = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot t} (1 - \nu) \quad (5.5)$$

b.- cáscara cónica.- en este caso típico el ángulo ϕ es una constante ($r_1 = \infty$) y no puede unir como una coordenada sobre el meridiano. En su lugar introduciremos en coordenada s , la distancia de un punto de la superficie media, usualmente medido del vértice a lo largo del generador.

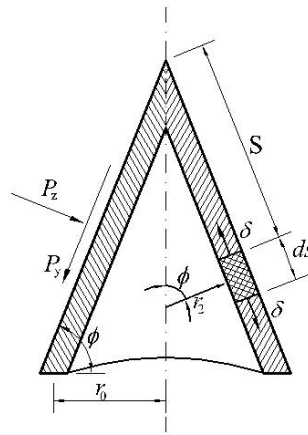


Figura 5.8.- Cáscara cónica

Acordando que la longitud de un elemento meridional $ds = r_1 \cdot d\phi$, entonces.

$$\frac{d}{d\phi} = r_1 \frac{d}{ds} \quad (a)$$

$$\text{también,} \quad r_0 = s \cdot \cos \phi \quad r_2 = s \cdot \cot \phi \quad N\phi = Ns \quad (b)$$

Estas relaciones cuando son introducidas en la ecuación 5.2 y 5.1a, dan

$$\frac{d}{ds} (N_s \cdot s) - N\theta = -P_y \cdot s \quad (5.6a)$$

$$N\theta = -P_z \cdot s \cdot \cot\phi = -\frac{P_z \cdot r_0}{\text{Sen}\phi} \quad (5.6b)$$

Donde r_0 es el radio inferior de la base. Los componentes de carga P_y y P_z están en S y la dirección radial respectivamente. La suma de ecuación 5.6 da

$$\frac{d}{ds}(N_s \cdot s) = -(P_y + P_z \cdot \cot\phi) \cdot s$$

La fuerza meridional, integrando la expresión de arriba, es

$$N_s = -\frac{1}{s} \int (P_y + P_z \cdot \cot\phi) s \cdot ds \quad (5.7)$$

Una forma alternativa de la ecuación 5.6a puede ser obtenida de las ecuaciones 5.1a y 5.1b. Las fuerzas membranales serán entonces

$$N_s = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \text{Sen}\phi}$$

$$N\theta = -\frac{P_z \cdot r_0}{\text{Sen}\phi} \quad (5.8)$$

Si se observa que dado una carga externa distribuida, tensiones circulares y meridionales pueden ser realizados independientemente.

c.- Cáscara Circular Cilíndrica.- para obtener los resultados de tensión en una cáscara circular cilíndrica, uno puede comenzar con las ecuaciones del cono, haciendo $\phi = \pi/2$, $P_z = P_r$ y el radio inferior $a = r_0 = ctte$, entonces las ecuaciones 5.8 se vuelven

$$N_s = N_x = -\frac{F}{2 \cdot \pi \cdot a} \quad (5.9)$$

en el cual x es medido en la dirección axial.

Para recipientes cilíndricos cerrados bajo una presión interna constante, $P = P_r$ y $F = -\pi \cdot a^2 \cdot P$ la ecuación 5.9 da las siguientes tensiones axiales y circulares

$$\sigma_x = \frac{P \cdot a}{2t} \quad \sigma_\theta = \frac{P \cdot a}{t} \quad (5.10)$$

De la ley de Hook, la extensión del radio de un cilindro bajo la acción de tenciones dadas arriba es

$$\delta c = \frac{a}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_x) = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot t} (2 - \nu) \quad (5.11)$$

Soluciones de varios otros casos de significado práctico pueden ser obtenidos empleando un procedimiento similar a las que se describe en los párrafos siguientes como se demuestra en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 5.1.- Considere una cubierta domo de mercado simplemente apoyado de radio θ y espesor t , cargado solamente con un peso propio P por unidad de área. **a)** Determine la tensión, para un domo de geometría de media esfera (*Figura 5.9*).

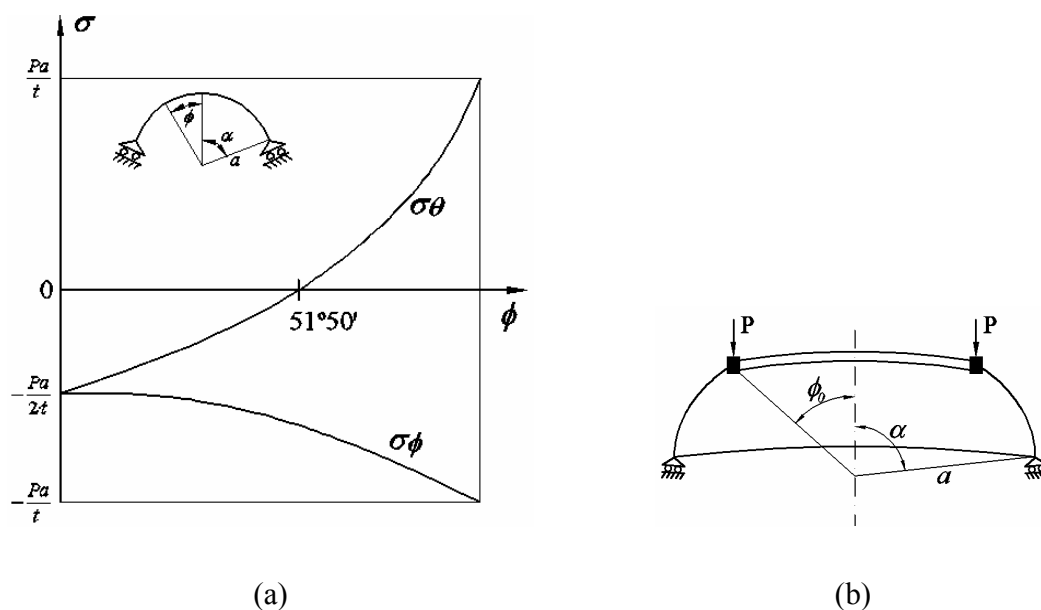


Figura 5.9 Domo de media esfera

b) Asumir que el domo semiesférico es construido de 20 mm de espesor de concreto de peso 2300 kg/m^3 y una luz $2 \cdot a = 56 \text{ m}$. aplicando la teoría de máximas tensiones principales evalúe la habilidad de la cáscara a la resistencia a la falla por rotura. La fatiga de rotura del

hormigón es $f_{ck}=210 \text{ kg/cm}^2$, y $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$. también verifique la posibilidad de un pandeo local.

c) determine las tensiones en el domo el cual es truncado media esfera (*Figura 5.9b*)

Solución.- los componentes del peso del domo son

$$f_x = 0 \quad P_y = P \cdot \text{Sen} \phi \quad P_z = P \cdot \text{Cos} \phi \quad (5.12)$$

a) refiriéndonos a la *Figura 5.9a* el peso de una parte del domo sustentado por ϕ es

$$F = \int_0^\phi P \cdot \pi \cdot s \cdot \text{Sen} \phi \cdot a \cdot d\phi = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot P (1 - \text{Cos} \phi) \quad (a)$$

introduciendo en la ecuación 5.3 de P_z y F dado por la ecuación 5.12, c y dividiendo el resultado por t nos da las tensiones de membrana:

$$\sigma_\phi = -\frac{a \cdot P (1 - \text{Cos} \phi)}{t \cdot \text{Sen}^2 \phi} = -\frac{a \cdot P}{t (1 + \text{Cos} \phi)}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a \cdot P}{t} \left(\text{Cos} \phi - \frac{1}{1 + \text{Cos} \phi} \right) \quad (5.13)$$

los términos están dibujados para un hemisferio en la *Figura 5.9a*. Claramente σ_ϕ es siempre compresión, estos valores se incrementan con ϕ de $-P \cdot a / 2t$ en la corona a $-P \cdot a / t$ en el borde, el signo de σ_θ sobre la otra mano, cambia con el valor de ϕ el segmento de las ecuaciones de arriba de $\sigma_\theta=0$ para $\phi=51^\circ 50'$. Cuando ϕ es menor a este valor; σ_θ es compresión. Para $\phi > 51^\circ 50'$, σ_θ es tensión, como se muestra en la figura.

b).- la máxima tensión de compresión en el domo es $\sigma_\phi = Pa/t$

$$\sigma_\phi = \frac{0.0023 \cdot 2800}{7} = 0.92 \text{ kg/cm}^2$$

note que la falla no ocurre cuando $|\sigma_\phi| < |f_{ck}|$, claramente para domos grandes los niveles de tensión debidos a la carga muerta están lejos del limite de tensión del material y mas pequeños en compresión. Note también que el concreto es débil en tensión y una diferente conclusión puede emerger de la consideración de falla propia a fuerzas de tensión directa

sin la tensión de la resistencia del material es menor que 0.92 kg/cm^2 , una asignación de refuerzo se requerirá para asegurar en diseño satisfactorio.

Sobre la aplicación de la ecuación (f) de la sección 5.2, los niveles de tensión en el cual ocurre pandeo local en el domo es dado por

$$\sigma_{cr} = 0.25 \cdot \frac{E \cdot t}{a}$$

$$\sigma_{cr} = 0.25 \cdot \frac{210000}{2800} = 131.25 \text{ kg/cm}^2 \gg 0.92$$

se puede observar que esto no posibilita el pandeo local porque $\sigma_\phi < \sigma_{cr}$.

c).- muchos domos no son cerrados en la porción superior y tienen una linterna, una torre pequeña para iluminación, y ventilación. En este caso, un anillo reforzado es usado para soportar la estructura superior como se muestra en la *Figura 5.9b*. El Angulo correspondiente a la abertura es $2 \cdot \phi_0$ y P es la carga vertical por unidad de longitud actuando en el anillo reforzado. La resultante de la carga total sobre la posición del domo sustentado por el ángulo ϕ ecuación (c), es dado.

$$F = 2 \cdot \pi \int_{\phi_0}^{\phi} a^2 \cdot P \cdot \text{Sen} \phi \cdot d\phi + P \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \text{Sen} \phi_0$$

$$F = 2 \cdot \pi \cdot a^2 P (\text{Cos} \phi_0 - \text{Cos} \phi) + 2 \cdot \pi \cdot P \cdot \text{Sen} \phi_0$$

Usando la ecuación 5.3, obtenemos

$$\sigma_\phi = -\frac{a \cdot P}{t} \cdot \frac{\text{Cos} \phi_0 - \text{Cos} \phi}{\text{Sen}^2 \phi} - \frac{P \cdot \text{Sen} \phi_0}{t \cdot \text{Sen}^2 \phi_0}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a \cdot P}{t} \left(\frac{\text{Cos} \phi_0 - \text{Cos} \phi}{\text{Sen}^2 \phi} - \text{Cos} \phi \right) + \frac{P \cdot \text{Sen} \phi}{t \cdot \text{Sen}^2 \phi} \quad (5.14)$$

La deformación circunferencial en el domo bajo la acción de tensiones membranas puede ser deducida de la ley de Hooke.

$$\xi_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_\phi)$$

Esta deformación contribuye a un cambio $\xi_\theta \cdot a \cdot \text{Sen} \phi$ en el límite del radio. El apoyo simple mostrado en la figura, libre al movimiento como la cáscara se deforma bajo carga, asegura que no se produzca flexión en las proximidades del borde.

Ejemplo 5.2.- Consideremos un domo planetario que puede ser aproximado como apoyado y en el borde como truncado. Deduzca las expresiones para las fuerzas circulares y meridianas para dos condiciones de carga. **a)** La cáscara carga solamente su peso propio P por unidad de área (Figura 5.10a), **b)** la cáscara soporta la carga de nieve que es asumida como uniformemente distribuida sobre el plano (Figura 5.10b)

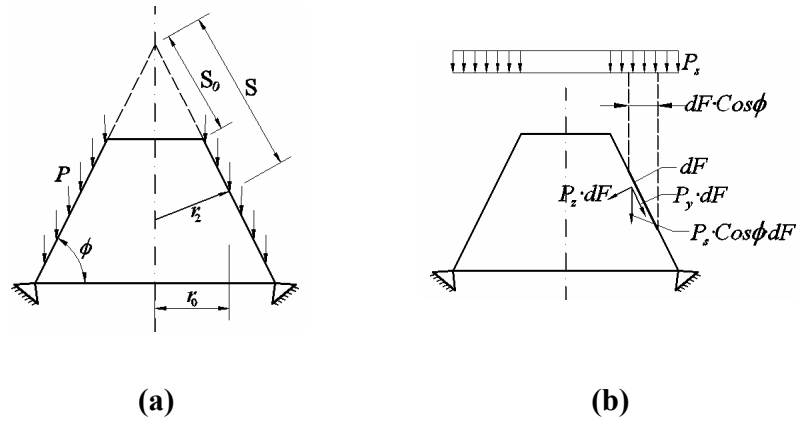


Figura 5.10 Cono truncado

Solución.- a) refiriéndonos a la Figura 5.10a

$$r_2 = s \cdot \text{Cot} \phi \quad r_o = s \cdot \text{Cos} \phi \quad P_z = P \cdot \text{Cos} \phi \quad (d)$$

el peso que es parte del cono definido por $S - S_0$ es determinado de

$$F = \int_{S_0}^S P \cdot 2\pi \cdot r \cdot \text{Sen} \phi \cdot ds = 2 \cdot \pi P \int_{S_0}^S S \cdot \text{Cot} \phi \cdot \text{Sen} \phi \cdot ds$$

$$F = \pi \cdot P \cdot \text{Cos} \phi (s^2 - s_0^2) + c$$

como no hay fuerzas actuando en el borde superior, $c=0$ ahora las tensiones resultantes en la dirección s y θ pueden ser rápidamente obtenidos. Sustituyendo F y ecuación (d) en la ecuación 5.8

$$\begin{aligned} N_s &= -\frac{P}{2 \cdot s} \cdot \frac{s^2 - s_0^2}{\text{Sen} \theta} \\ N_\theta &= -P \cdot s \cdot \frac{\text{Cos}^2 \phi}{\text{Sen} \phi} \end{aligned} \quad (5.15)$$

b) para analizar las componentes de la carga de nieve P_s , usaremos un grupo de fuerzas actuando sobre la superficie media del elemento dF (Figura 5.10b), refiriéndonos a esta Figura, tenemos

$$P_x = 0, P_y = P_s \cdot \text{Sen} \phi \cdot \text{Cos} \phi, \quad P_z = P_s \cdot \text{Cos}^2 \phi \quad (5.16)$$

de las ecuaciones 5.8, d y 5.16 tenemos

$$N_\theta = -P \cdot s \cdot \frac{\text{Cos}^3 \phi}{\text{Sen} \phi} \quad (1.17a)$$

similarmente, ecuaciones 5.7, d y 5.16 da

$$N_s = -\frac{1}{s} \int (P_s \cdot \text{Sen} \phi \cdot \text{Cos} \phi + P_s \cdot \text{Cos}^2 \phi \cdot \text{Cot} \phi) \cdot s \cdot ds$$

la condición que $N_s = 0$ y $S = S_0$ no conduce a $c = \frac{1}{2} P_s \cdot S_0^2 \cdot \text{Cot} \phi$ de aquí

$$N_s = -\frac{P_s}{2 \cdot s} (s^2 - s_0^2) \cdot \text{Cot} \phi \quad (5.17b)$$

dividiendo la ecuación 5.17 con t , los términos de membrana son obtenidos. Es interesante notar que las tres típicas cargas (peso por unidad de área, nieve carga por unidad de área plana y carga de viento por superficie de área) son de la misma orden. Para estructuras ordinarias esta fuerza es aproximadamente 150 a 200 Kg/m².

Ejemplo 5.3 Considerando una cáscara en la forma de un domo de sección transversal circular esta sujeto a una presión externa P (Figura 5.11), se pide determine las tensiones membranales σ_θ y σ_ϕ .

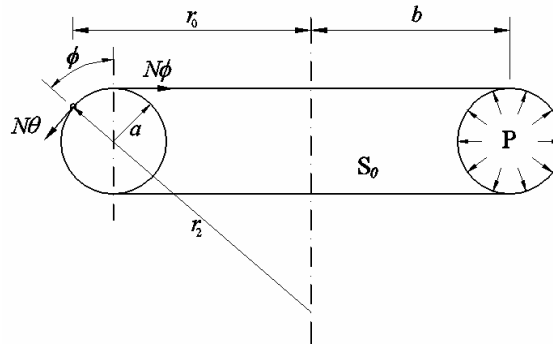


Figura 5.11 Domo de sección circular

Solución.- considérese la porción de la cáscara definida por ϕ . Del equilibrio vertical de fuerzas nos conduce a

$$2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot N_\phi = \pi \cdot P (r_0^2 - b^2)$$

$$\text{o} \quad N_\phi = \frac{P(r_0^2 - b^2)}{2 \cdot r_0 \cdot \text{Sen} \phi} = \frac{P \cdot a(r_0 + b)}{2 \cdot r_0}$$

Introduciendo N_ϕ en la ecuación 5.1a $P_z = -P$ y $r_1 = a$, obtenemos

$$N_\theta = \frac{P \cdot r_2 (r_0 - b)}{2 \cdot r_0} = \frac{P \cdot a}{2}$$

Los términos son

$$\sigma_\phi = \frac{P \cdot a(r_0 + b)}{2 \cdot r_0} \quad \sigma_\theta = \frac{P \cdot a}{2 \cdot t}$$

Se nota que σ_θ es constante a través de la cáscara por la condición de simetría.

Ejemplo 5.4.- La Figura 5.12 representa un recipiente cilíndrico cerrado en la forma de un medio elipsoide de semiejes a y b . determinar las tensiones membranales resultantes de una presión de vapor interna P .

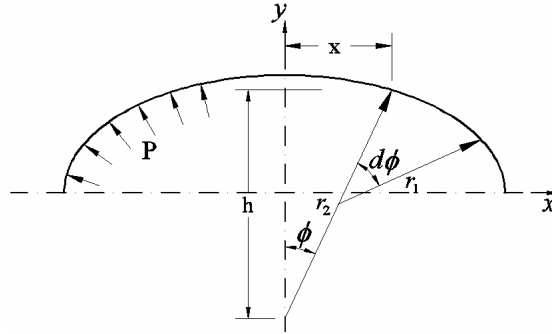


Figura 5.12 Membrana media elipsoide

Solución.- Expresiones para los radios principales de curvatura r_1 y r_2 se requieren. La ecuación de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nos conduce a $y = \pm b\sqrt{a^2 - x^2} / a$, las magnitudes deducidas de esta expresión son

$$y' = \frac{b \cdot x}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y} \quad y'' = \frac{b^4}{a^2 \cdot y^3} \quad (e)$$

Refiriéndonos a la Figura

$$\tan \phi = y' = \frac{x}{h} \quad r_2 = \sqrt{h^2 + x^2} \quad (f)$$

De la primera de las ecuaciones (e) y (f), $h = a\sqrt{a^2 - x^2}$, el cual, cuando es sustituido en la segunda de las ecuaciones (f) da r_2 , introduciendo de las ecuaciones (e) en la expresión familiar para la curvatura $(1 + y'^2)^{3/2} / y''$ donde el radio r_1 . nos da

$$r_1 = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4} \quad r_2 = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{1/2}}{b^2} \quad (5.19)$$

La carga resultante es representado por $F = \pi \cdot P \cdot r_2^2 \cdot \text{Sen}^2 \phi$, las fuerzas de membrana pueden ser determinados de la ecuación 5.1 en términos de las curvaturas principales esto es como sigue

$$\sigma\phi = \frac{P \cdot r_2}{2t} \quad \sigma\theta = \frac{P}{t} \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} \right) \quad (5.20)$$

En la corona (parte superior de la cáscara) $r_1 = r_2 = a^2 / b$ y la ecuación 5.20 se reduce a

$$\sigma\phi = \sigma\theta = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot b \cdot t}$$

En el ecuador (base de la cáscara) $r_1 = b^2 / a$, $r_2 = a$ y la ecuación 5.20 aparece como

$$\sigma\phi = \frac{P \cdot a}{2 \cdot t} \quad \sigma\theta = \frac{P \cdot a}{2 \cdot t} \left(1 - \frac{a^2}{2 \cdot b^2} \right)$$

Si se observa que los términos circulares $\sigma\theta$ se vuelven compresión será $a^2 > 2 \cdot b^2$, claramente, las fatigas membranales $\sigma\phi$ son siempre tensiones. La relación $a/b = 1$, el cono de una esfera, da tensiones mas bajas.

Ejemplo 1.5.- analice las tensiones de membrana en un metal delgado contenedor de forma cónica, apoyado en la parte superior. Considere dos casos específicos **a)** La cáscara esta sujeta a una presión interna P **b)** la cáscara es llenado con un liquido de peso especifico γ mostrado a continuación

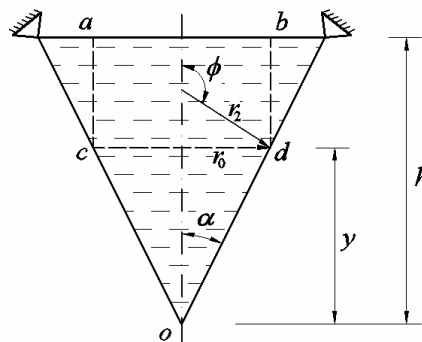


Figura 5.13 Cáscara cónica sujeta a presión

Solución.- a) para este caso, $P_z = -P$, $\phi = (\pi / 2) + \alpha$ y $F = -P \cdot \pi \cdot r_0^2$. La expresión 5.8 después de dividir por el espesor t , esto queda como

$$\sigma_s = \frac{P \cdot r_0}{2 \cdot t \cdot \cos \alpha} \quad \sigma_\theta = \frac{P \cdot r_0}{t \cdot \cos \alpha} \quad (5.21)$$

b) de acuerdo a la ley familiar de hidrostática, la presión de cualquier punto en la cáscara es igual al peso de una columna de unidad del área transversal del líquido en el punto. Para cualquier nivel arbitrario y , la presión es

$$P = -P_z = \gamma(h - y) \quad (g)$$

empleando $r_0 = y \cdot \tan \alpha$, la segunda de las ecuaciones 5.8, después de dividir por t , se transforma.

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma(h - y) \cdot y \cdot \tan \alpha}{t \cdot \cos \alpha} \quad (5.22a)$$

Diferenciando con respecto a y e igualando a cero revela que el máximo valor de la tensión ocurre en $y = h/2$, y esta dado por

$$\sigma_{\theta_{max}} = \frac{\gamma \cdot h^2 \cdot \tan \alpha}{4 \cdot t \cdot \cos \alpha}$$

La carga es igual al peso del líquido de volumen $a c o d b$, esto es

$$F = -\pi \cdot \gamma \cdot y^2 \left(h - y + \frac{1}{3} y \right) \cdot \tan^2 \alpha$$

Introduciendo este valor en la primera de las ecuaciones (5.8), y dividiendo la expresión resultante por t da

$$\sigma_s = \frac{\gamma \cdot \left(h - \frac{2}{3} y \right) \cdot \tan \alpha}{2 \cdot t \cdot \cos \alpha} \quad (1.22b)$$

El máximo valor de esta fatiga, ocurre en $y = 3h/4$ y es

$$\sigma_{s_{max}} = \frac{3 \cdot h^2 \cdot \gamma \cdot \tan \alpha}{16 \cdot t \cdot \cos \alpha}$$

Ejemplo 1.6.- Determine las fuerzas de membrana en un tanque esférico de depósito llenado con un líquido de peso específico γ , y apoyado sobre un tubo cilíndrico

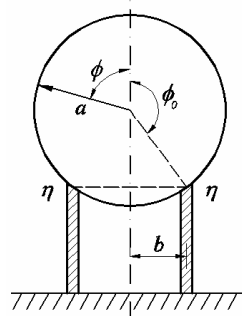


Figura 5.14 Tanque esférico

Solucion.- La carga es expresada

$$P = -P_z = \gamma \cdot a \cdot (1 - \cos \phi)$$

Pertenecientes a esta presión, la fuerza resultante F para la porción interceptada por ϕ es

$$F = -2\pi \cdot a^2 \cdot \int_0^\phi \gamma \cdot a \cdot (1 - \cos \phi) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot d\phi$$

$$F = -2\pi \cdot a^3 \gamma \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \phi \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \cos \phi \right) \right]$$

Insertando lo de arriba en la ecuación 5.3 nos da

$$N_\phi = \frac{\gamma \cdot a^2}{6 \cdot \sin^2 \phi} [1 - \cos^2 \phi \cdot (3 - 2 \cdot \cos \phi)] = \frac{\gamma \cdot a^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cdot \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right)$$

$$N_\theta = \frac{\gamma \cdot a^2}{6} \left(5 - 6 \cdot \cos \phi + \frac{2 \cdot \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right)$$

Las ecuaciones 5.23 son validas para $\phi < \phi_0$

En la determinación de F para $\phi < \phi_0$, la suma de la reacción del apoyo vertical $\frac{4}{3} \gamma \cdot \pi \cdot a^3$, también toma en cuenta en adición a la carga de presión interna que es

$$F = -\frac{4}{3}\gamma\pi a^3 - 2\gamma\pi a^3 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos^2\phi \left(1 - \frac{2}{3}\cos\phi \right) \right]$$

La ecuación 5.3 ahora nos da

$$N\phi = \frac{\gamma a^2}{6} \left(5 + \frac{2\cos^2\phi}{1-\cos\phi} \right)$$

$$N\theta = \frac{\gamma a^2}{6} \left(1 - 6\cos\phi - \frac{2\cos^2\phi}{1-\cos\phi} \right) \quad (5.24)$$

De las ecuaciones 5.23 y 5.24 se observa que ambas fuerzas $N\phi$ y $N\theta$ cambian valores abruptamente en el apoyo ($\phi = \phi_0$). Una discontinuidad en $N\theta$ produce una discontinuidad de la deformación del círculo paralelo sobre las inmediaciones de los lados de $n-n$, así la deformación asociada con la solución membranar no es compatible con la continuidad de la estructura en el apoyo $n-n$.

5.1.6. Deformación Axial Simétrica.

Ahora discutiremos los desplazamientos en una cáscara de revolución cargada simétricamente considerando un elemento AB de longitud $r_1 d\phi$ de un meridiano en una cáscara no deformada. Permitiremos el desplazamiento en la dirección de una tangente al meridiano y en una dirección normal a la superficie media se designa por v y ω , respectivamente como se muestra en la figura.

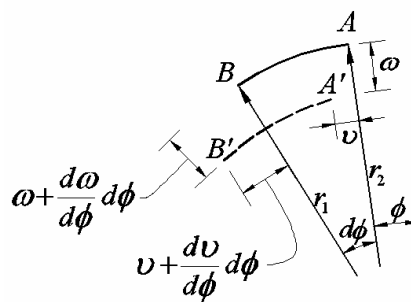


Figura 5.15 Deformación axial simétrica

Después de la deformación, AB es desplazado a la posición $A'B'$, en el análisis siguiente es empleada la aproximación de deformaciones pequeñas y se desprecia las tensiones infinitesimales de orden superior.

La deformación experimentada por un elemento de longitud infinitesimal $r_1 d\phi$ puede ser considerado como compuesta de un incremento en longitud $(dv/d\phi) d\phi$, perteneciente al desplazamiento tangencial, y un decremento en la longitud del elemento AB debido a la deformación es

$$\frac{dv}{d\phi} \cdot d\phi - \omega d\phi$$

Dividiendo por la longitud inicial del elemento $r_1 d\phi$, hallamos la deformación de lamina en la dirección del meridiano $\xi\phi$

$$\xi\phi = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dv}{d\phi} - \frac{\omega}{r_1} \quad (a)$$

Considerando un elemento de paralelo *Figura 5.15* puede verse que debido a los desplazamientos v y ω el radio r_0 del paralelo crece la cantidad

$$v \cdot \cos\phi - \omega \cdot \sin\phi$$

La circunferencia del paralelo aumenta en la misma proporción que su radio, por lo tanto

$$\xi\theta = \frac{1}{r_0} \cdot (v \cdot \cos\phi - \omega \cdot \sin\phi) \quad (b)$$

O bien sustituyendo $r_0 = r_2 \cdot \sin\phi$

$$\xi\theta = \frac{1}{r_2} \cdot (v \cdot \cot\phi - \omega) \quad (c)$$

Eliminando ω entre las ecuaciones (a) y (c) obtenemos para v la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{d\phi} - v \cdot \cot\phi = r_1 \cdot \xi\phi - r_2 \cdot \xi\theta \quad (d)$$

Las deformaciones $\xi\phi$ y $\xi\theta$ pueden ponerse en función de sus tensiones de membrana por la ley de Hooke

$$\xi\phi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma\phi - \nu \cdot \sigma\theta) \quad \xi\theta = \frac{1}{E} \cdot (\sigma\theta - \nu \cdot \sigma\phi) \quad (e)$$

Sustituyendo en la ecuación (d) obtenemos

$$\frac{d\nu}{d\phi} - \nu \cdot \cot\phi = \frac{1}{E} [\sigma\phi \cdot (r_1 + r_2) - \sigma\theta \cdot (r_2 + \nu \cdot r_1)] \quad (5.25)$$

Podemos observar que las deformaciones simétricas de una cáscara de revolución pueden determinarse integrando en ecuación 5.25 cuando las tensiones de membrana son conocidas, representando el segundo miembro de esta ecuación por $f(\phi)$ escribimos

$$\frac{d\nu}{d\phi} - \nu \cdot \cot\phi = f(\phi)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\nu = \left[\int \frac{f(\phi)}{\text{Sen}\phi} \cdot d\phi + C \right] \cdot \text{Sen}\phi \quad (f)$$

La constante c es determinado a partir de las condiciones de apoyo. Una vez conocido ν , puede obtenerse inmediatamente ω de la ecuación (c)

Ejemplo 1.7.- Determine los desplazamientos de una lamina esférica (techo domo) cargado con su peso propio (figura 5.9a)

Solución.- Para la media esfera bajo esta consideración $r_1 = r_2 = a$, las tenciones dadas por la ecuación 5.13, $\sigma\phi$, y $\sigma\theta$ y la ecuación 5.25 toma la forma

$$\frac{d\nu}{d\phi} - \nu \cdot \cot\phi = \frac{a^2 \cdot P \cdot (1 + \nu)}{E \cdot t} \cdot \left(\cos\phi - \frac{2}{1 + \cos\phi} \right) = f(\phi)$$

Insertando esta expresión en la ecuación (f), obtenemos

$$v = \frac{a^2 \cdot P \cdot (1 + \nu)}{E \cdot t} \left(\text{Sen} \phi \cdot \text{Ln}(1 + \text{Cos} \phi) - \frac{\text{Sen} \phi}{1 + \text{Cos} \phi} \right) + C \cdot \text{Sen} \phi \quad (g)$$

En esto es necesario emerger c tal que $v = 0$ y $\phi = \alpha$ (Figura 5.9a). De esto se deduce que

$$C = \frac{a^2 \cdot P \cdot (1 + \nu)}{E \cdot t} \left(\frac{1}{1 + \text{Cos} \alpha} - \text{Ln}(1 + \text{Cos} \alpha) \right) \quad (h)$$

Sustituyendo este valor de c en la ecuación (g) se obtiene la deflexión v , el desplazamiento w se determina de la ecuación (c), en el apoyo donde $v = 0$, el desplazamiento w puede calcularse directamente sin necesidad de emplear la ecuación (g); la segunda de la ecuación (e) y (c) da directamente la solución.

5.1.7. Cáscaras de Revolución Cargadas Asimétricamente.

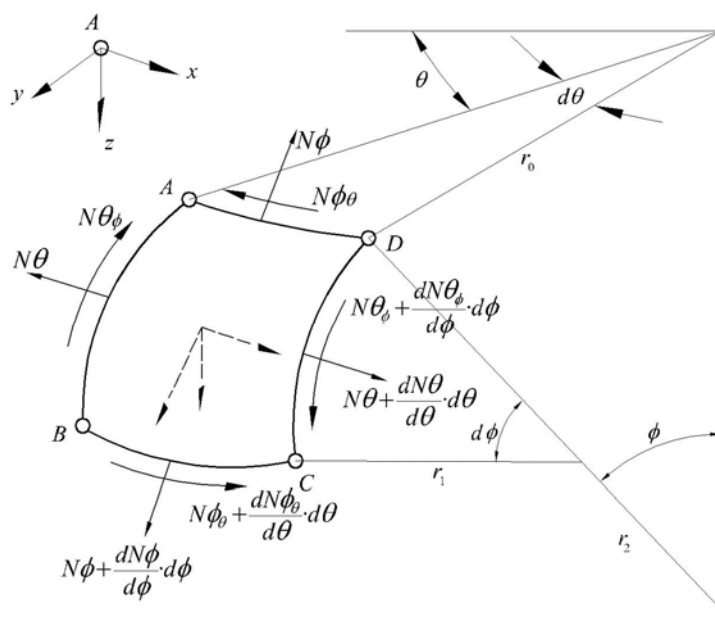


Figura 5.16 Componentes cáscara cargada asimétricamente

En la flexión de una cáscara de revolución bajo carga no simétrica, no solamente actúan las fuerzas normales N_ϕ y N_θ sino también fuerzas de corte $N_{\phi\theta}$ y $N_{\theta\phi}$ (Figura 5.16). para el equilibrio del momento se requiere que $N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi}$ como siempre es el caso de una cáscara delgada, la carga de superficie, referido al área unitaria de la superficie media, tiene componentes P_x , P_y y P_z las fuerzas de dirección x son como sigue

$$\frac{\partial N\theta}{\partial \theta} \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (a)$$

Es perteneciente a la variación de $N\theta$. La componente horizontal de las fuerzas $N\theta\phi \cdot r_1 \cdot d\phi$ entrando sobre las caras AB y CD de un elemento hacen un Angulo $d\phi$, y así se tiene la siguiente resultante en la dirección x

$$N\theta\phi \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot \cos\phi \cdot d\phi \quad (b)$$

La diferencia de las fuerzas cortantes actuando sobre las caras AC y BD del elemento es expresado

$$N\theta\phi \frac{dr_0}{d\phi} \cdot d\phi \cdot d\theta + \frac{\partial N\theta\phi}{\partial \phi} \cdot r_0 \cdot d\phi \cdot d\theta = \frac{\partial}{\partial \phi} (r_0 \cdot N\theta\phi) \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (c)$$

La componente de la fuerza externa es

$$P_x \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (d)$$

De la condición de equilibrio $-x$, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (r_0 \cdot N\theta\phi) + \frac{\partial N\theta}{\partial \theta} \cdot r_1 + N\theta\phi \cdot r_1 \cdot \cos\phi + P_x \cdot r_0 \cdot r_1 = 0 \quad (5.26a)$$

La expresión que gobierna el equilibrio y de un caso de carga simétrica (sección 5.4), nos obliga a adicionar la fuerza

$$\frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Producido por la diferencia de las fuerzas cortantes actuando sobre las caras AB y CD del elemento. Sin embargo como la proyección de las fuerzas cortantes sobre el eje z se anulan, la ecuación 5.1a permanecen validos para el presente caso. El equilibrio de fuerzas en la dirección y y z de este modo satisfacen las expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N\phi \cdot r_0) + \frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} \cdot r_1 - N\theta \cdot r_1 \cdot \cos\phi + P_y \cdot r_0 \cdot r_1 = 0 \quad (1.26c)$$

Las ecuaciones 5.26 permiten determinar las fuerzas de membrana en una cáscara de revolución, son cargas que pueden ser no simétricas, en general, varía con θ y ϕ , tal como el caso que se discretiza en la máxima sección.

Debemos notar que las ecuaciones que gobiernan el equilibrio para cáscaras esféricas, cónicas y cilíndricas pueden ser rápidamente deducidas de las ecuaciones 5.26 siguiendo el procedimiento idéntico como el que se ha descrito en la sección 5.5

5.1.8. Cáscara de Revolución Bajo Carga de Viento.

Es usual representar cargas dinámicas tal como el viento y los efectos de terremotos por cargas estáticas equivalentes o cargas seudo estáticas para propósitos de diseño. La carga de viento sobre cáscaras esta compuesto de presión sobre el lado del viento y succión del lado de sotavento. Solamente la componente de carga actuando perpendicularmente a la superficie media P_z es considerado importante, componentes P_x y P_y debido a las fuerzas de fricción y de magnitud despreciable. Asumiendo por consideración de simplicidad de que el viento actúa en la dirección del plano meridiano $\phi = 0$, las componentes de presión del viento son como sigue:

$$P_x = 0 \quad P_y = 0 \quad P_z = P \cdot \text{Sen} \phi \cdot \text{Cos} \theta \quad (5.27)$$

En la ecuación de arriba, P representa la intensidad de viento estático. Para propósitos de ilustración la *Figura 5.17* muestra la distribución de carga de viento de diseño estático sobre un domo esférico. Esta distribución debe considerarse como una aproximación grosera.

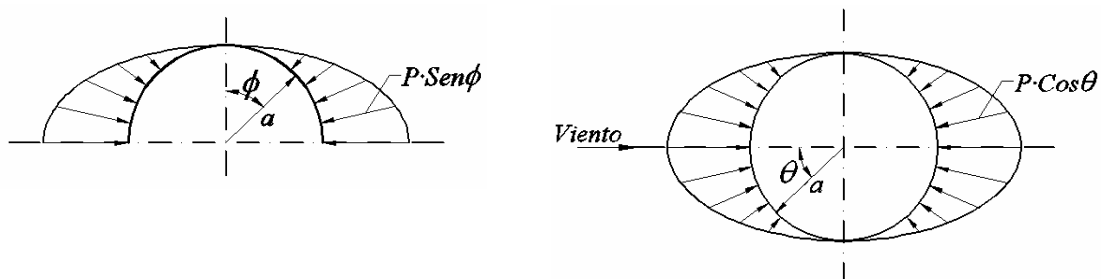


Figura 5.17 Carga de viento actuando sobre domo

Procediendo con la solución, sustituimos la ecuación 5.27 en la ecuación 5.26 y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi}(r_0 \cdot N\phi) + \frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} \cdot r_1 - N\theta \cdot r_1 \cdot \cos \phi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi}(r_0 \cdot N\phi) + \frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} \cdot r_1 + N\theta \cdot r_1 \cdot \cos \phi &= 0 \\ N\phi \cdot r_0 + N\theta \cdot r_1 \cdot \sin \phi &= -P \cdot r_0 \cdot r_1 \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \quad (a)\end{aligned}$$

La tercera expresión, cuando se sustituye en la primera y segunda, se elimina $N\theta$ la ecuación de equilibrio para cáscaras de revolución bajo la acción de la presión del viento son

$$\frac{\partial N\phi}{\partial \phi} + \left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr_0}{d\phi} + \cot \phi \right) \cdot N\phi + \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} = -P \cdot r_1 \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta \quad (5.28a)$$

$$\frac{\partial N\theta\phi}{\partial \phi} + \left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr_0}{d\phi} + \frac{r_1}{r_2} \cot \phi \right) \cdot N\theta\phi - \frac{1}{\sin \phi} \cdot \frac{\partial N\phi}{\partial \theta} = -P \cdot r_1 \cdot \sin \theta \quad (5.28b)$$

$$N\theta = -P \cdot r_0 \cdot \cos \theta - \frac{N\phi \cdot r_0}{r_1 \cdot \sin \phi} \quad (5.28c)$$

Ilustraremos en la solución con los siguientes problemas, con la determinación de tensiones de membrana.

Ejemplo 5.8.- Consideremos un protector de forma de hongo, una cáscara teniendo la forma de un cono circular, soportado por una columna en su vértice (*Figura 5.18*). Encontrar las tensiones circulares, meridionales y corte si la cáscara es sometida a la presión del viento descrito por la ecuación 5.27

Solución.- Refiriéndonos a la *Figura 5.18*

$$r_1 = \infty \quad r_2 = s \cdot \tan \alpha \quad ds = r_1 \cdot d\phi \quad r_0 = s \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{d}{d\phi} = r_1 \cdot \frac{d}{ds} \quad \frac{dr_0}{ds} = \text{Sen } \alpha \quad (c)$$

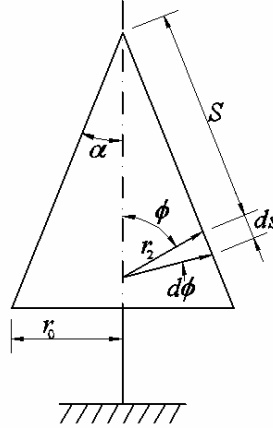


Figura 5.18 Cono circular

Remplazamos $N\phi$ por Ns y $N\theta\phi$ por $N\theta s$, introduciendo estos valores con la ecuación 5.27 en la ecuación 5.28b, obtenemos después de integrar

$$N\theta s = -\frac{1}{s^2} \left(\frac{P \cdot s^3}{3} + C \right) \cdot \text{Sen } \theta \quad (d)$$

La condición que el lado $y = L$ de la cáscara es libre, es consecuencia que $C = -P \cdot L^3 / 3$, en la expresión de arriba nosotros tenemos

$$\tau_{\theta s} = \frac{N\theta s}{t} = \frac{P}{3t} \cdot \frac{L^3 - s^3}{s^2} \cdot \text{Sen } \theta \quad (5.29a)$$

La ecuación 5.28a, después de sustituir en las ecuaciones (b), (c) y 5.29a, se vuelve

$$\frac{\partial Ns}{\partial s} + \frac{Ns}{S} = - \left(\frac{P \cdot L^3 - s^3}{-3s^3 \cdot \text{Sen } \alpha} + P \cdot \text{Sen } \alpha \right) \cdot \text{Cos } \theta$$

que integrando nos da

$$\sigma_s = \frac{Ns}{t} = \frac{P \cdot \text{Cos } \theta}{t \cdot \text{Sen } \alpha} \left(\frac{L^3 - s^3}{3s^2} - \frac{L^2 - s^2}{2s} \text{Cos}^2 \alpha \right) \quad (5.29b)$$

La expresión 5.28c da como resultado en la tensión circular

$$\sigma_{\theta} = \frac{N\theta}{t} = -\frac{P \cdot s \cdot \text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \theta}{t} \quad (5.29c)$$

Podemos ver en las ecuaciones 5.29a y 5.29b que las tensiones meridionales y corte crecen sin limite superior ($s=0$), como se espera en el punto de apoyo. Si podemos ver que las fuerzas resultantes verticales Ns y $N\theta\phi$ transmitido en circulo paralelo aproximadamente la carga total de la cáscara cuando $s=s_1$, aquí si es una longitud finita particular. Para evitar tensiones infinitas, la cáscara cónica debe ser asumida como asegurada a la columna a lo largo de un circulo correspondiente a s_1 .

5.1.9. Cáscaras Cilíndricas de Forma General.

Una cáscara cilíndrica es formada por una línea recta, el generador, paralelo a la dirección inicial a lo largo de una trayectoria cerrada. El elemento en la *Figura 5.19a* es una cáscara cilíndrica de sección transversal arbitraria. Un elemento de cáscara esta producido por dos generadores adyacentes y dos planos normales al eje axial x , espaciados aparte por dx , este elemento descrito es localizado por las coordenadas x y θ .

Asumiendo que una carga no uniforme actúa sobre la cáscara. Entonces tenemos

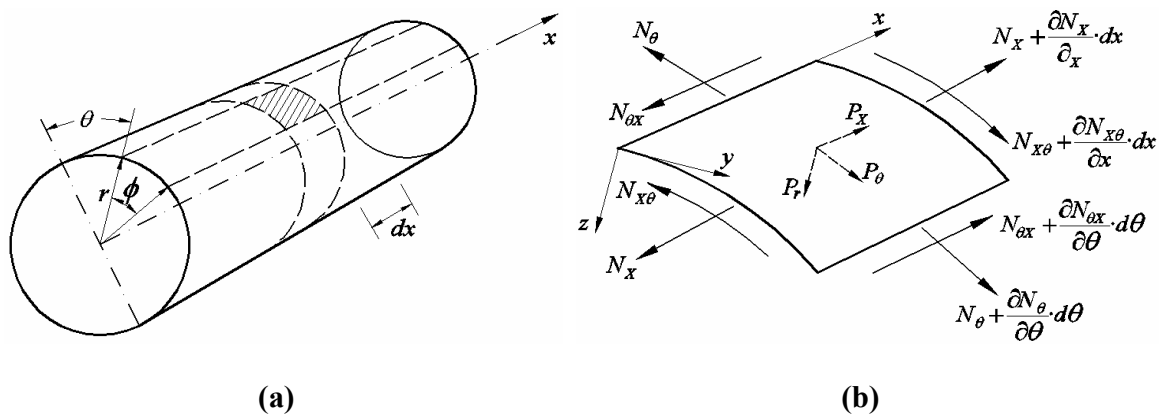


Figura 5.19 Componentes cáscara cilíndrica

Un diagrama de cuerpo libre de un elemento membranar conteniendo las fuerzas mostradas en la *Figura 5.19b*, los componentes x y θ de las fuerzas por unidad de área externos aplicados son denominados P_x , P_θ y están indicados actuando en la dirección incrementada

de x y θ . La componente radial o normal de carga P_r actúa en el sentido positivo, en la dirección interior. Las fuerzas de equilibrio en las direcciones x , θ y r es representado por.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot dx \cdot r \cdot d\theta + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \cdot d\theta \cdot dx + P_x \cdot dx \cdot r \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \cdot d\theta \cdot dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot dx \cdot r \cdot d\theta + P_{\theta} \cdot dx \cdot r \cdot d\theta = 0$$

$$N_{\theta} \cdot dx \cdot d\theta + P_r \cdot dx \cdot r \cdot d\theta = 0$$

Dividiendo por las cantidades diferenciales, nosotros obtenemos las ecuaciones de equilibrio de una cáscara cilíndrica y es como sigue

$$N_{\theta} = P_r \cdot r \quad (5.30a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = -P_{\theta} \quad (5.30b)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = -P_x \quad (5.30c)$$

Como ya se ha mencionado en la sección 5.7 las expresiones de arriba pueden ser obtenidas directamente de las ecuaciones 5.26, si se observa que estos tienen una estructura simple y pueden ser resueltos uno por uno.

Para una carga prescrita, N_{θ} ya está dado de la ecuación 5.30a, subsecuentemente $N_{x\theta}$ y N_x pueden determinarse integrando las ecuaciones 5.30b y 5.30c, entonces tenemos

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= -P_r \cdot r \\ N_{x\theta} &= -\int \left(P_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} \right) \cdot dx + f_1(\theta) \\ N_x &= -\int \left(P_x + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \right) \cdot dx + f_2(\theta) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Donde $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$ son funciones arbitrarias de integración que deben ser evaluadas sobre las condiciones básicas de contorno. Estas funciones aumentan porque es una integración de derivadas parciales.

Ejemplo 1.9.- Un cilindro horizontal largo conducto es apoyado como se muestra en la *Figura 5.20* y se llena toda su capacidad con liquido de peso especifico γ . Determine las fuerzas de membrana bajo las siguientes condiciones. **a)** es de longitud libre, con juntas de expansión en ambos extremos; **b)** ambos extremos son rígidamente fijados.

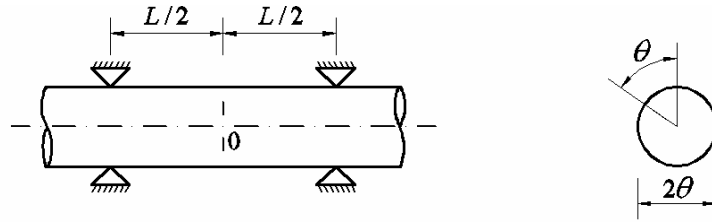


Figura 5.20 Cilindro apoyado

Solución.- Para un nivel arbitrario definido por el ángulo θ la presión es $\gamma \cdot a \cdot (1 - \cos \theta)$ y las fuerzas externas son

$$P_r = -\gamma \cdot a \cdot (1 - \cos \theta) \quad P_\theta = P_x = 0 \quad (a)$$

Donde el signo menos indica la dirección exterior, sustituyendo en la ecuación 5.31, tenemos

$$N_\theta = \gamma \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \theta)$$

$$N_{x\theta} = -\int \gamma \cdot a \cdot \sin \theta \cdot dx + f_1(\theta) = -\gamma \cdot a \cdot x \cdot \sin \theta + f_1(\theta)$$

$$N_x = \int \gamma \cdot x \cdot \cos \theta \cdot dx - \frac{1}{a} \int \frac{df_1}{d\theta} \cdot dx + f_2(\theta)$$

$$N_x = \frac{\gamma \cdot x^2}{2} \cdot \cos \theta - \frac{x \cdot df_1}{a \cdot d\theta} + f_2(\theta) \quad (b)$$

a) las condiciones para los bordes simplemente apoyados son representados por

$$N_x = 0 \quad (x = \pm L/2) \quad (c)$$

introduciendo las ecuaciones (b) en (c) nos da

$$0 = \frac{\gamma \cdot L^2}{8} \cdot \cos \theta - \frac{L \cdot df_1}{2 \cdot a \cdot d\theta} + f_2(\theta)$$

$$0 = \frac{\gamma \cdot L^2}{8} \cdot \cos \theta + \frac{L \cdot df_1}{2 \cdot a \cdot d\theta} + f_2(\theta)$$

sumando y restando las expresiones anteriores, respectivamente

$$f_2(\theta) = -\frac{\gamma \cdot L^2}{8} \cdot \cos \theta \quad (d)$$

$$\frac{df_1}{d\theta} = 0 \quad f_1(\theta) = 0 + C \quad (e)$$

de la segunda de las ecuaciones (b), observamos que C en la ecuación (e) representa el valor de la carga uniforme $N_{x\theta}$ cuando $x = 0$, esta carga no está presente porque el tubo es libre a la torsión, entonces $C = 0$, la solución, de las ecuaciones (b) y (d) se escribe como sigue:

$$N_\theta = \gamma \cdot a^2 (1 - \cos \theta) \quad (5.32a)$$

$$N_{x\theta} = -\gamma \cdot a \cdot x \cdot \sin \theta \quad (5.32b)$$

$$N_x = -\frac{\gamma}{8} \cdot (L^2 - 4x^2) \cdot \cos \theta \quad (5.32c)$$

note que las fuerzas de corte $N_{x\theta}$ y la normal N_x , respectivamente, representan idéntica distribución de la misma luz con las fuerzas de corte y el momento de flexión de una viga uniformemente cargada.

Aplicando la ley de Hooke

$$u = \frac{1}{E \cdot t} \int_{-L/2}^{L/2} (N_x - \nu \cdot N_\theta) dx \quad (f)$$

Introduciendo las fuerzas de membrana (ecuación 5.32), la expresión de arriba nos da la deformación axial.

b) En este caso, no ocurren cambios en la longitud del generador:

$$\int_{-L/2}^{L/2} (N_x - \nu \cdot N_\theta) dx = 0 \quad (g)$$

Donde

$$\begin{aligned} N_x &= -\frac{\gamma}{8} \cdot (L^2 - 4x^2) \cdot \cos \theta + f_2(\theta) \\ N_\theta &= \gamma \cdot a^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (h)$$

introduciendo las ecuaciones (h) en la ecuación (g) da

$$f_2(\theta) = \nu \gamma \cdot a^2 (1 - \cos \theta) + \frac{\gamma \cdot L^2}{24} \cdot \cos \theta$$

Donde

$$N_x = \nu \gamma \cdot a^2 (1 - \cos \theta) + \frac{\gamma}{2} \left(x^2 - \frac{L^2}{12} \right) \cdot \cos \theta \quad (5.33)$$

Una búsqueda de la deformación circunferencial $\xi_\theta = (N_\theta - \gamma \cdot N_x) / E \cdot t$, nos da cero porque los apoyos empotrados inhiben cualquier deformación en los extremos, algunas flexiones del tubo ocurren cerca de los apoyos. La solución membranar (ecuaciones 5.32a, 5.32b y 5.33), coinciden muy bien con las medidas de distancias aproximadamente al de los apoyos. El detalle de la distribución de fuerzas de reacciones de apoyo es obtenido por aplicación de la teoría de flexión.

5.1.10. Roturas de Acción Elástica en Cáscaras.

Desde el punto de vista de diseño, esta claro que para propósitos prácticos, es necesario obtener las dimensiones propias de un miembro tal que puede resistir una carga prescrita sin sufrir fallas por rotura de acción elástica. Como ya se ha mencionado las dimensiones que han sido asignadas a un elemento cargado dependiendo de la teoría de la falla concerniente de cáscara de platificación. Esto se ilustra en los ejemplos siguientes para dos casos particulares de estructuras de cáscaras.

Ejemplo 5.10.- Un recipiente cilíndrico circular con los extremos cerrados esta sujeto a la presión interna P (Figura 5.21) el tubo es fabricado de un material teniendo un punto de fluencia de tensión σ_{yp} . Determine el espesor t requerido de los extremos, recurriendo a las teorías de falla, y diseñe con los resultados.

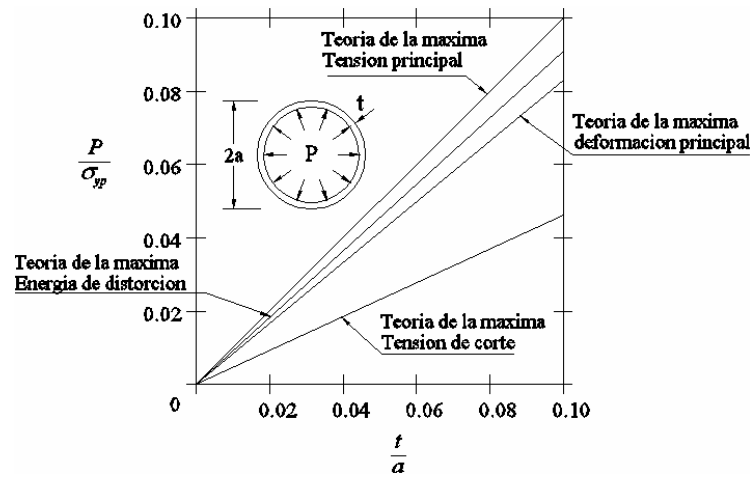


Figura 5.21 Presión actuante cáscara cilíndrica

Solución.- La tensión circular y axial de cáscara esta dado por las ecuaciones 5.10

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{P \cdot a}{t} \quad \sigma_2 = \sigma_x = \frac{P \cdot a}{2t} \quad (a)$$

Teoría de la tensión máxima principal

$$t = \frac{P \cdot a}{\sigma_{yp}} \quad (b)$$

Teoría de la máxima tensión de corte. Como σ_1 y σ_2 son de un mismo signo, obtenemos

$$t = \frac{P \cdot a}{2\sigma_{yp}} \quad (c)$$

Teoría de la máxima deformación principal

$$t = \frac{P \cdot a}{2\sigma_{yp}} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad (d)$$

Teoría de la máxima energía de distorsión

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{P \cdot a}{\sigma_{yp}} \quad (e)$$

Las relaciones entre las presiones internas y los espesores están dados por las ecuaciones (b) a (e) que es representado en la Figura 5.21 para $\nu = 1/3$ si observamos que la teoría de la máxima tensión de corte es la mas conservativa; la teoría de la tensión máxima principal no conduce al mínimo resultado conservativo.

Ejemplo 5.11.- Un tanque cónico es construido de hierro de tensión de fluencia σ_{yp} en tensión y $3/2 \sigma_{yp}$ en compresión (*Figura 5.13*) el tanque es llenado con un liquido de peso específico γ y es apoyado en los bordes. Determine el espesor de su pared t usando un factor de seguridad N . aplicando **a)** la teoría de tensión principal, **b)** la teoría de la máxima energía de distorsión

Solución.- Expresiones para las tensiones circulares y longitudinales, son obtenidos de las ecuaciones 5.22, y son

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_\theta &= \gamma \cdot (a - y) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{t \cdot \cos \alpha} \\ \sigma_2 = \sigma_s &= \gamma \cdot \left(a - \frac{2}{3} y \right) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{2 \cdot t \cdot \cos \alpha}\end{aligned}\quad (f)$$

Los valores máximos de las tensiones principales son dados por

$$\begin{aligned}\sigma_{1max} &= \frac{\gamma \cdot h^2 \cdot \tan \alpha}{4 \cdot t \cdot \cos \alpha} & y &= \frac{a}{2} \\ \sigma_{2max} &= \frac{3 \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot \tan \alpha}{16 \cdot t \cdot \cos \alpha} & y &= \frac{3a}{4}\end{aligned}\quad (g)$$

a) De la teoría de la máxima tensión principal (ecuaciones 5.33), juntamente con la ecuación (g) da

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{yp}}{N} &= \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot \tan \alpha}{4 \cdot t \cdot \cos \alpha} & \frac{3 \cdot \sigma_{yp}}{2N} &= \frac{3 \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot \tan \alpha}{16 \cdot t \cdot \cos \alpha} \\ \text{o} \quad t &= 0.25 \cdot \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot N \cdot \tan \alpha}{\sigma_{yp} \cdot \cos \alpha} & t &= 0.125 \cdot \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot N \cdot \tan \alpha}{\sigma_{yp} \cdot \cos \alpha}\end{aligned}\quad (h)$$

b) La teoría de máxima energía de distorsión (expresiones (g)), demuestra que las tensiones principales toman sus valores principales en diferentes localizaciones. La localización el cual combinando sus tensiones principales es critico si es acotado como sigue. Primero las ecuaciones (f) son substituidas en las ecuaciones; $\left(\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \right)^{1/2} = \sigma_{yp}$

$$\left[\gamma \cdot (a - y) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{t \cdot \cos \alpha} \right]^2 + \left[\gamma \cdot \left(a - \frac{2}{3} y \right) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{2 \cdot t \cdot \cos \alpha} \right]^2 - \left[\gamma \cdot (a - y) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{t \cdot \cos \alpha} \right] \cdot \left[\gamma \cdot \left(a - \frac{2}{3} y \right) \cdot y \cdot \frac{\tan \alpha}{2 \cdot t \cdot \cos \alpha} \right] = \sigma_{yp}^2 \quad (i)$$

luego derivando con respecto a y e igualando a cero nos da

$$y = 0.52 \cdot a \quad (d)$$

sustituyendo la ecuación (d) en (i) resulta en

$$t = 0.225 \cdot \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot N \cdot \tan \alpha}{\sigma_{yp} \cdot \cos \alpha}$$

En este problema, se concluye que el espesor de la pared, valor dado por la primera de las ecuaciones (h), cubriendo con la teoría de la máxima tensión principal es 10% mas grande que el predicho por la teoría de la máxima distorsión.

CAPITULO 6

TEORIA GENERAL O DE FLEXION EN CÁSCARAS

6.1. INTRODUCCIÓN.

Como fue observado en el capítulo anterior, la teoría membranar no puede, en todos las condiciones, proporcionar soluciones compatibles con las condiciones reales de deformación. Esta teoría también falla al predecir el estado de tensión en sus límites y en ciertas otras áreas de la cáscara. Estos defectos son evitados con la aplicación de la teoría de flexión y considerando fuerzas membranales, fuerzas de corte y momentos que actúan sobre la estructura de la cáscara.

El desarrollo de las ecuaciones diferenciales que gobiernan para el plano medio de desplazamientos u , v , y w los cuales definen la geometría o deformaciones cinemáticas de una cáscara, un procedimiento como en el caso de placas. Nosotros comenzaremos por deducir las soluciones básicas ante los resultantes de tensión y deformación para cáscaras de forma general. En las secciones 6.4 y 6.5 serán desarrolladas las relaciones para la energía de tensión y deformación bajo una carga arbitraria.

La teoría completa de flexión es matemáticamente complicada y la primera solución considerando las tensiones de flexión de cáscaras data solamente de 1920, en excepción de la sección 6.11 nos limitaremos a la consideración de los casos prácticos mas significativos envolviendo cargas simétricas rotacionalmente.

6.2. RESULTANTES DE TENSION DE CÁSCARAS.

En la deducción de expresiones para las resultantes de tensión, que es, la resultante de fuerzas y mementos representando tensiones internas, consideramos un elemento infinitesimal (*Figura 6.1a*). Este elemento es definido por dos pares de planos, normal a la

superficie media de la cáscara. El origen de un sistema de coordenadas cartesianas es localizado en una esquina del elemento, como se muestra, con los ejes x y y tangente a las líneas de curvatura principal, y z perpendicular a la superficie media.

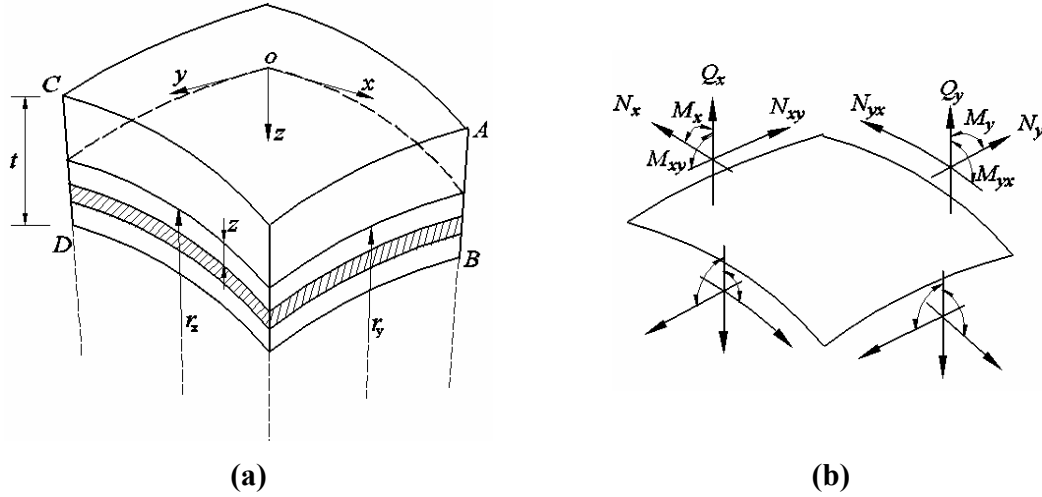


Figura 6.1 Componente infinitesimal de una cáscara

En la curvatura de cáscara, la longitud de cara de un elemento localizado a una distancia z de la superficie media no son simplemente ds_x y ds_y , la longitud medida sobre la superficie media, será mejor

$$\frac{ds_x(r_x - z)}{r_x} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) ds_x \quad \frac{ds_y(r_y - z)}{r_y} = \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y$$

Donde r_x y r_y son los radios de las curvaturas principales en los planos xz y yz , respectivamente.

Las tensiones actuando sobre el plano de una cara de un elemento son σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} . Asignando N_x representando la resultante de la fuerza normal actuando sobre el plano de cara yz por unidad de longitud, y usando la verdadera longitud de cara dado arriba tenemos

$$N_x \cdot ds_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y \cdot dz$$

Cancelando las longitudes ds_y , esto se vuelve.

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y} \right) dz = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x (1 - z \cdot k_y) dz$$

Expresiones para el efecto de las tensiones resultantes por unidad de longitud son deducidas en una manera similar. Los esfuerzos mostrados en la *Figura 6.1a* son

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1 - z \cdot k_y) \\ \sigma_y (1 - z \cdot k_x) \\ \tau_{xy} (1 - z \cdot k_y) \\ \tau_{yx} (1 - z \cdot k_x) \\ \tau_{xz} (1 - z \cdot k_y) \\ \tau_{yz} (1 - z \cdot k_x) \end{Bmatrix} dz \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1 - z \cdot k_y) \\ \sigma_y (1 - z \cdot k_x) \\ \tau_{xy} (1 - z \cdot k_y) \\ \tau_{yx} (1 - z \cdot k_x) \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz$$

La convención de signos es la misma que en el tratamiento de placas. Podemos concluir que aunque son igual $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, las fuerzas cortantes N_{xy} y N_{yx} no son generalmente iguales, ni los momentos torsores M_{xy} y M_{yx} . Esto es porque en general $r_x \neq r_y$, para cáscaras delgadas, sin embargo para el cual nosotros hacemos que t es relativamente pequeño con respecto a r_x y r_y , consecuentemente, z/r_x y z/r_y pueden ser despreciados con relación a la unidad. Sobre esta base, $N_{xy} = N_{yx}$ y $M_{xy} = M_{yx}$. Las tensiones resultantes son descritas por la misma expresión como se muestra en placas delgadas.

6.3. RELACIONES DE FUERZA MOMENTO Y DESPLAZAMIENTO.

Las resultantes de tensión de las deformaciones de una cáscara σ_x , σ_y , y τ_{xy} deben ser evaluados en términos de deformaciones. Conveniendo que nuestra suposición, la tensión en la dirección de z es despreciado $\sigma_z = 0$. De acuerdo con la ley de Hooke es escrita

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\xi_x + \nu \cdot \xi_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\xi_y + \nu \cdot \xi_x) \\ \tau_{xy} &= \gamma_{xy} \cdot G \end{aligned} \quad (a)$$

Primero vamos a determinar las deformaciones que aparecen en las expresiones de arriba. Encontraremos el elemento de cáscara deformada de la *Figura 6.2*, notando que la relación (3) de la sección 5.1, en los lados mn y $m'n'$ son líneas rectas. La figura mostrada de la superficie media alargada y el lado mn rotado con respecto a su configuración original. La unidad de elongación ξ_x de una fibra de longitud l_f , localizado en el plano xz a una distancia z de la superficie media, es dado por

$$\xi_x = \frac{\Delta l_f}{l_f} \quad (b)$$

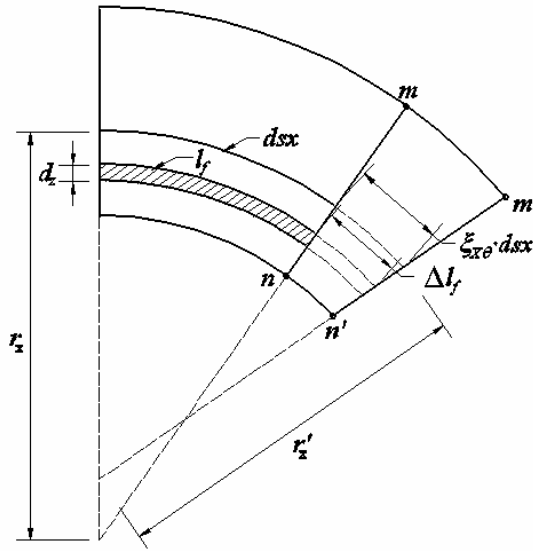


Figura 6.2 Deformación de elemento cáscara

Aquí Δl_f es la elongación experimentada por l_f referido a la *Figura 6.2*

$$l_f = ds_x (1 - z/r_x) \quad \Delta l_f = ds_x (1 + \xi_{x0}) \left(1 - \frac{z}{r'_x} \right) - l_f \quad (c)$$

Donde ξ_{x0} representa la deformación unitaria del plano medio de dirección x ; r'_x es el radio de curvatura después de la deformación, y ds_x , la longitud de la fibra de la superficie media. Sustituyendo las ecuaciones (c) en la ecuación (b), tenemos

$$\xi_x = \frac{\xi_{x0}}{1 - (z/r_x)} - \frac{z}{1 - (z/r_x)} \left| \frac{1}{(1 - \xi_{x0})r'_x} - \frac{1}{r_x} \right|$$

En la cual r_x es la sumatoria anterior a la deformación. Porque para el caso bajo el análisis $t \ll r_x$, $2/r_x$ puede ser omitido. En adición, esto puede ser demostrado que su influencia de $\xi_{x\theta}$ sobre curvatura es despreciable. Introduciendo las condiciones de despreciar las expresiones de arriba se vuelven.

$$\xi_x = \xi_{x\theta} - z \left(\frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right) = \xi_{x\theta} - z \cdot \chi_x \quad (d)$$

Donde χ representa el cambio de curvatura de la superficie media la unidad de elongación de cualquier distancia normal a la superpie media es entonces relacionado a la superficie media estirada y el cambio en curvatura asociado con deformación, para la dirección y , una expresión similar es obtenida

$$\xi_y = \xi_{y\theta} - z \left(\frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right) = \xi_{y\theta} - z \cdot \chi_y \quad (e)$$

La nomenclatura paralela que es usada en conexión con ξ_x .

La distribución de la deformación de corte γ_{xy} es próximamente evaluado, denominando γ_{xyo} a la deformación cortante del plano medio, perteneciente a la relación del lado AB relativo al oz alrededor del eje x (Figura 6.1a) y γ_{xyo} , y referido a las ecuaciones para placas, tenemos

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xyo} - 2 \cdot z \cdot \chi_{xy} \quad (f)$$

Aquí χ_{xy} designa la torsión del plano medio. Claramente, es representado el efecto de rotación de un elemento cáscara alrededor de una normal al plano medio, sustituyendo las ecuaciones (d), (e) y (f) en la ecuación (a), obtendremos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\xi_{xo} + \nu \cdot \xi_{yo} - z(\chi_x + \nu \cdot \chi_y)] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\xi_{yo} + \nu \cdot \xi_{xo} - z(\chi_y + \nu \cdot \chi_x)] \\ \tau_{xy} &= (\gamma_{xyo} - 2 \cdot z \cdot \chi_{xy}) \cdot G \end{aligned} \quad (6.2)$$

Finalmente, cuando la ecuación 6.2 es introducido en la ecuación 6.1 despreciando términos z/r_x y z/r_y como antes, los términos resultantes se transforman

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} (\xi_{xo} + \nu \cdot \xi_{yo}) & N_y &= \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} (\xi_{yo} + \nu \cdot \xi_{xo}) \\ M_x &= -D(\chi_x + \nu \cdot \chi_y) & M_y &= -D(\chi_y + \nu \cdot \chi_x) \\ N_{xy} = N_{yx} &= \frac{\gamma_{xyo} \cdot E \cdot t}{2(1 + \nu)} & M_{xy} = M_{yx} &= -d(1 - \nu)\chi_{xy} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Aquí $D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$ define la rigidez flexiónante de la cáscara, la misma que para una placa. La ecuación 6.3 con las ecuaciones constitutivas para cáscaras.

Las condiciones reales son tal como permiten son despreciados los momentos, el análisis de tenciones es bastante simplificado como M_x , M_y , y $M_{xy}=M_{yx}$ ahora se pierden. Las que permanecen son las fuerzas de membrana N_x , N_y y $N_{xy}=N_{yx}$.

6.4. COMPONENTES DE TENSION EN UNA CÁSCARA.

Ahora estamos en la posibilidad de expresar los componentes tensionales en una cáscara producida por las fuerzas y momentos. Para este propósito, sustituimos las tensiones y deformaciones de la ecuación 6.3 en las ecuaciones 6.2 con los resultados

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{t} + \frac{12 \cdot M_x \cdot z}{t^3} & \sigma_y &= \frac{N_y}{t} + \frac{12 \cdot M_y \cdot z}{t^3} \\ \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} + \frac{12 \cdot M_{xy} \cdot z}{t^3} \end{aligned} \quad (6.4)$$

El primer término de las ecuaciones claramente describe tensiones de membrana y el segundo termino, tensiones de flexión. Podemos observar que la distribución de las componentes de tensión σ_x , σ_y , y τ_{xy} dentro la cáscara es lineal.

Puede ser verificado como para placas o vigas, que las tensiones cortantes verticales son gobernadas por una distribución parabólica.

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) \quad (6.5)$$

Estos valores, como en el caso de placas, son pequeños en comparación con los otros componentes de tensión.

Las relaciones juntamente las de tensión son de este modo idénticas para vigas, placas y cáscaras. Conociendo las resultantes de tensión, uno puede rápidamente computar la tensión en cualquier punto dentro una cáscara a través de la aplicación de las ecuaciones 6.4 y 6.3

6.5. ENERGÍA DE DEFORMACION EN LA FLEXIÓN Y ALARGAMIENTOS DE CÁSCARAS.

Las ecuaciones para placas sobre aplicaciones de tensiones y deformaciones apropiadas nos guían a la expresión de una energía de deformación para las cáscaras. Como en la flexión de placas convenimos que las deformaciones cortantes transversales (γ_{xy} , γ_{yz}) y la tensión normal σ_z se pierden. Las componentes de energía de deformación de una cáscara deformada son la energía de flexión-deformación Ub y la energía de membrana-deformación Um .

$$U = Ub + Um \quad (6.6)$$

La energía de flexión-deformación, sobre el reemplazo de curvaturas k_x , k_y , k_{xy} en las ecuaciones por cambios en curvatura χ_x , χ_y , χ_{xy} , es dado por

$$Ub = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \iint_A \left[(\chi_x + \chi_y)^2 - 2(1-\nu)(\chi_x \cdot \chi_y - \chi_{xy}^2) \right] dx \cdot dy \quad (6.7)$$

Donde A representa la superficie de área de la cáscara

La energía de la membrana esta asociado con el alargamiento de la superficie media producido por fuerzas en el plano y es dado por

$$Um = \frac{1}{2} \cdot \iint_A (N_x \cdot \xi_{xo} + N_y \cdot \xi_{yo} + N_{xy} \cdot \gamma_{xyo}) dx \cdot dy \quad (6.8a)$$

Introduciendo las ecuaciones 6.3 dentro la expresión de arriba nos conduce a la siguiente forma envolviendo las deformaciones y constantes elásticas.

$$U_m = \frac{E \cdot t}{2(1-\nu^2)} \iint_A \left[(\xi_{xo} + \xi_{yo})^2 - 2(1-\nu) \left(\xi_{xo} \cdot \xi_{yo} - \frac{1}{4} \gamma_{xyo}^2 \right) \right] dx \cdot dy \quad (6.8b)$$

Las expresiones 6.7, 2.8 permite evaluar rápidamente la energía para un número de cáscaras comúnmente encontradas de forma regular y carga regular. La energía de deformación juega un importante rol en el tratamiento de problemas de flexión y pandeo.

6.6. CÁSCARAS CILÍNDRICAS CIRCULARES CARGADAS AXISIMETRICAMENTE.

Tubos, tanques, calderas y varios otros recipientes bajo presión interna ejemplifican cáscaras cilíndricas cargadas axisimetricamente, pertenecientes a la simetría, un elemento cortado de un cilindro de radio a , puede tener actuando sobre ella solamente las tensiones resultantes mostrados en la *Figura 6.3*: N_θ , M_θ , N_x y Q_x . Además, la fuerza circunferencial y momento, N_θ y M_θ no varía con θ . Los desplazamientos circunferenciales v se pierden y necesitamos considerar solamente los desplazamientos x , y , u y w .

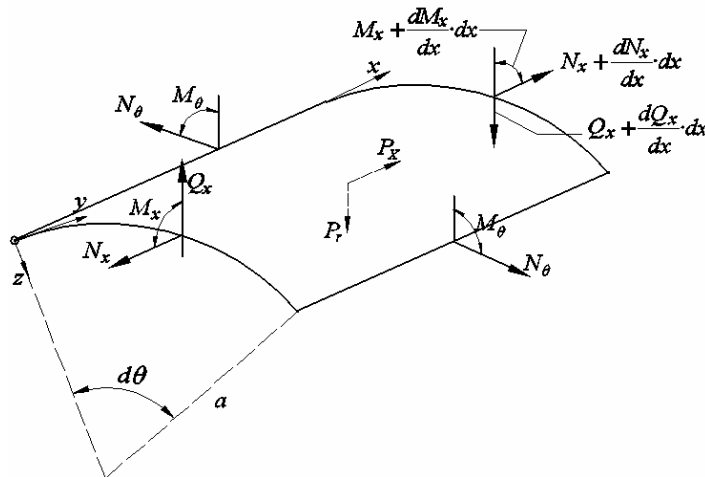


Figura 6.3 Componentes de equilibrio

Suprimiendo simplificaciones, solamente tres de las seis ecuaciones de equilibrio del elemento cáscara permanecerán satisfechos. Suponemos también que la carga externa es

como se muestra en la *Figura 6.3*. El equilibrio en la dirección (axial) x y dirección (radial) z ahora requiere que

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dx} a \cdot d\theta \cdot dx + P_x \cdot a \cdot d\theta \cdot dx &= 0 \\ \frac{dQ_x}{dx} dx \cdot a \cdot d\theta + N \theta \cdot dx \cdot d\theta + P_r \cdot dx \cdot a \cdot d\theta &= 0\end{aligned}\quad (a)$$

El equilibrio de momentos alrededor del eje y es gobernado por

$$\frac{dM_x}{dx} dx \cdot a \cdot d\theta - Q_x \cdot a \cdot d\theta \cdot dx = 0 \quad (b)$$

Cancelando términos en las ecuaciones (a) y (b) resulta

$$\frac{dN_x}{dx} + P_x = 0 \quad (6.9a)$$

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N \theta + P_r = 0 \quad (6.9b)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (6.9c)$$

Es interesante hacer notar que la ecuación 6.9c es un estado de la relación física de viga: la fuerza cortante es la primera en deducirse del momento de flexión. De la ecuación 6.9a la fuerza axial N_x es

$$N_x = -\int P_x \cdot dx + C \quad (c)$$

Donde C es una constante de integración, claramente los valores desconocidos Q_x , N_θ y M_x no pueden ser determinados únicamente de la ecuación 6.9b y 6.9c, además es necesario examinar los desplazamientos de la superficie media

Porque $v = 0$, las relaciones de desplazamiento-deformación son, por simetría

$$\xi_x = \frac{dv}{dx} \quad \xi_\theta = \frac{(a-w)d\theta - a \cdot d\theta}{a \cdot d\theta} = -\frac{w}{a} \quad (d)$$

Aplicando la ley de Hooke tenemos

$$N_x = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} (\xi_x + \nu \cdot \xi_\theta) = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \left(\frac{d\theta}{dx} - \nu \cdot \frac{w}{a} \right)$$

del cual

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1 - \nu^2}{E \cdot t} N_x + \nu \frac{w}{a} \quad (6.10a)$$

Entonces, con la ley de Hooke y las ecuaciones d, la fuerza circunferencial es dado por

$$N_\theta = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} (\xi_\theta + \nu \cdot \xi_x) = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \left(\frac{a}{w} - \nu \frac{d\theta}{dx} \right) \quad (6.11)$$

La relación de desplazamientos de momentos son las mismas que para una curvatura plana dentro la superficie plana. Esto es, porque $d^2w/dy^2 = 0$

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dy^2} \quad M_\theta = \nu M_x \quad (6.12)$$

Donde D es la rigidez flexionante de la cáscara. Empleando las ecuaciones 6.9b, 6.9c y eliminando Q_x , se obtiene:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_\theta + Pr = 0$$

Finalmente, cuando la expresión de arriba es combinada con las ecuaciones 6.10a, 6.11 y 6.12, tenemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{E \cdot t}{a^2} w - \nu N_x - Pr = 0 \quad (6.13a)$$

Para una cáscara de espesor constante, la ecuación 6.13a se vuelve

$$D \cdot \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{E \cdot t}{a^2} w - \nu \frac{N_x}{a} - Pr = 0 \quad (6.13b)$$

Una forma mas conveniente de esta expresión es

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 w - \frac{\nu N_x}{a \cdot D} = \frac{Pr}{D} \quad (6.10b)$$

$$\beta^4 = \frac{E \cdot t}{4 \cdot a^2 \cdot D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 \cdot t^2} \quad (6.14)$$

donde el parámetro geométrico β tiene la dimensión de L^{-1} , el recíproco de longitud.

Las ecuaciones 6.10b o 6.13 y 6.10a representan condiciones de gobernabilidad de desplazamiento para una cáscara cilíndrica circular cargada simétricamente. Cuando una carga axial no existe, $N_x = 0$, las ecuaciones 6.10 se simplifican a

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a} \quad (6.15a)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 w = \frac{Pr}{D} \quad (6.15b)$$

La primera de estas, integrando directamente da u . La expresión 6.15b es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes, y también representa la ecuación de una viga de rigidez flexionante D , resistiendo en una fundación elástica y sujeto a una carga Pr .

La solución homogénea de la ecuación 6.15b es dado por

$$W_h = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} + C_3 \cdot e^{m_3 x} + C_4 \cdot e^{m_4 x}$$

Aquí C_1, C_2, C_3, C_4 son constantes y m_1, m_2, m_3, m_4 son las raíces de la expresión

$$m^4 + 4 \cdot \beta^4 = 0$$

Esta ecuación puede ser escrita, por adición y sustracción de $4 \cdot m^2 \beta^2$, como $(m^2 + 2 \cdot \beta^2)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot \beta^2 = 0$. Dado que, $m^2 + 2 \cdot \beta^2 = \pm 2 \cdot m \cdot \beta$, tenemos

$$m = \pm \beta(1 \pm i)$$

y seguidamente

$$W_h = e^{-\beta x} (C_1 \cdot e^{i\beta x} + C_2 \cdot e^{-i\beta x}) + e^{\beta x} (C_3 \cdot e^{i\beta x} + C_4 \cdot e^{-i\beta x})$$

Presentando la solución particular w_p , se puede notar que el resultado de la teoría de la membrana puede ser siempre considerada como una solución particular de la ecuación de la teoría de flexión.

La solución de la ecuación 6.15b puede por lo tanto escribirse

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cdot \cos \beta x + C_4 \cdot \sin \beta x) + f(k) \quad (6.16)$$

Donde C_1, C_2, C_3, C_4 son constantes arbitrarias de integración, a determinarse sobre la base de las condiciones apropiadas de contorno.

La sección 6.7 servirá para ilustrar la aplicación de la teoría.

6.7. CASO TÍPICO DE UNA CÁSCARA CILÍNDRICA CARGADA AXISIMETRICAMENTE.

Esta sección trata en los problemas de flexión de un cilindro con una longitud bastante grande comparado con su diámetro, el llamado cilindro infinito, sujeto a una carga P uniformemente distribuida a lo largo de una sección circular (Figura 6.4). Sin embargo como no es presión distribuida P_r sobre la superficie de la cáscara y $N_x = 0$, establecemos $f(x) = 0$ en la ecuación 6.16, la solución puede ser escrita como sigue

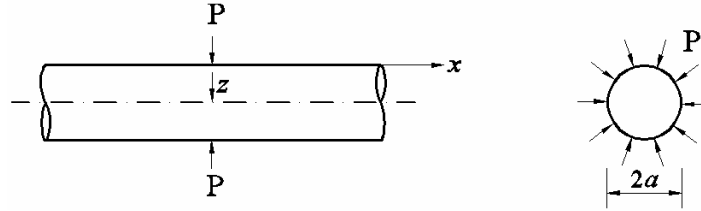


Figura 6.4 Cilindro infinito sujeto a una carga P

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cdot \cos \beta x + C_4 \cdot \sin \beta x) \quad (6.17)$$

Perteneciente a la simetría de la cáscara, condiciones de contorno para el medio anillo son deducidos del hecho que como $x \rightarrow \infty$, la deflexión y todas las derivadas de w con respecto a x deben desaparecer. Estas condiciones son cumplidas si $C_3 = C_4 = 0$ en la ecuación 6.17 nosotros entonces tenemos

$$w = e^{-\beta x} (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) \quad (6.18)$$

Sin embargo como $N_x = 0$, las ecuaciones 6.10a y 6.11 nos da

$$N_{\theta} = -\frac{E \cdot t \cdot w}{a} \quad (6.19)$$

De las ecuaciones 6.12 y 6.9c,

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad M_{\theta} = -\nu \cdot D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (6.20)$$

Las condiciones aplicadas inmediatamente a la derecha de la carga son

$$Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{P}{2} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (a)$$

Esta describe los requerimientos respectivos de cada mitad del cilindro cargado de media mitad de carga externa y la inclinación se pierde en el centro perteneciente a la simetría. Introduciendo las ecuaciones (a) en la ecuación 6.18 y $x = 0$, tenemos

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D}$$

El desplazamiento es entonces

$$w = \frac{P \cdot e^{-\beta x}}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} (\text{Sen} \beta x + \text{Cos} \beta x) \quad (6.21)$$

Este resultado puede ser expresado

$$w = \frac{P \cdot e^{-\beta x}}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} \left| \sqrt{2} \cdot \text{Sen} \left(\beta x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Observamos que la deflexión se atenúa con la distancia como una onda exponencial amortiguada de longitud de onda, para $\nu = 0.3$, $2 \cdot \pi / \beta \approx 4.89 \sqrt{a \cdot t}$.

Las siguientes notaciones son usadas mas convenientemente, representan las expresiones para resultantes de deflexión y tensión:

$$\begin{aligned}
 f_1(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\
 f_2(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x = -\frac{1}{2\beta} f_1' \\
 f_3(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) = \frac{1}{\beta} f_2' = -\frac{1}{2\beta^2} f_1'' \\
 f_4(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x = -\frac{1}{2\beta} f_3' = -\frac{1}{2\beta^2} f_2'' = \frac{1}{4\beta^3} f_1''' \\
 f_5(\beta x) &= -\frac{1}{\beta} f_4'
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Valores numéricos pueden obtenerse mediante tablas o desarrollando estas funciones, para varios valores de βx . El término βx es adimensional y es usualmente expresado en radianes, sustituyendo la ecuación 6.21 en la ecuación 6.19 y 6.20 tenemos

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} f_1(\beta x) \\
 N_\theta &= \frac{E \cdot t \cdot P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D \cdot a} f_1(\beta x) \\
 M_x &= \frac{P}{4\beta} f_3(\beta x) \\
 M_\theta &= \frac{\nu P}{4\beta} f_3(\beta x) \\
 Q_x &= -\frac{P}{2} f_4(\beta x)
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Estas expresiones son válidas para $x \geq 0$, para la mitad izquierda del cilindro, se toma x en la dirección opuesta al que se muestra en la *Figura 6.4*, la máxima deflexión y momento ocurre en $x = 0$, dado por las ecuaciones 6.23 son entonces

$$w_{max} = \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} = \frac{P \cdot a^2 \cdot \beta}{2 \cdot E \cdot t} \qquad M_{max} = \frac{P}{4\beta} \tag{6.24}$$

Los valores mayores de tensión de flexión ocurren en $x = 0$ y $z = t/2$, determinados por su aplicación en las ecuaciones 6.4 y 6.23

$$\sigma_{x,max} = \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \beta \cdot t^2} \qquad \sigma_{\theta,max} = \frac{P \cdot \beta}{2} \left(-\frac{a}{t} + \frac{3 \cdot \nu}{\beta^2 \cdot t^2} \right) \tag{b}$$

Las expresiones con las tensiones máximas axiales y circunferencial en el cilindro, respectivamente.

Se observa que con cada valor en las ecuaciones 6.22, las ecuaciones 6.23 decrecen con el incremento de βx . Por este motivo en muchas aplicaciones de la ingeniería, los efectos de cargas concentradas pueden ser despreciados en localizaciones para el cual $x > (\pi / \beta)$, además se puede concluir que la flexión es de un componente local. Una cáscara de longitud $L = 2\pi / \beta$, cargado en media longitud, experimenta la máxima deflexión y momento flexionante idénticamente cerca si se tomara como una cáscara larga.

Aplicaciones de las ecuaciones 6.23 juntamente con el principio de superposición permite la determinación de resultantes de deflexión y tensión en cilindros largos bajo cualquier otro tipo de carga.

Ejemplo 2.1.- un cilindro bastante largo de radio a es sujeto a una carga uniforme P sobre su longitud L (Figura 6.5), deducir una expresión para la deflexión de un punto arbitrario O dentro la longitud L .

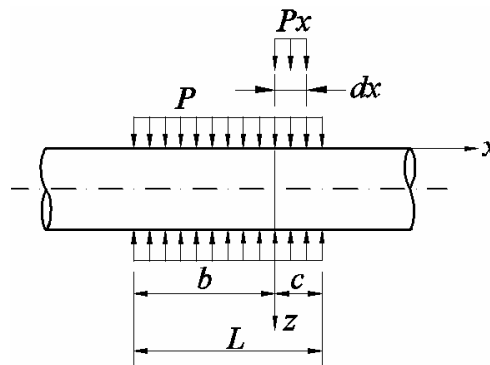


Figura 6.5 Cilindro infinito sujeto a Carga distribuida

Solución.- a través de la primera de las ecuaciones 6.23 la deflexión Δw en el punto O perteneciente a la carga $Px = P \cdot dx$ es

$$\Delta w = -\frac{P \cdot dx}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} f_1(\beta x)$$

Los desplazamientos sobre un punto O producidos por la carga total es dado por

$$w = \int_0^b \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} f_1(\beta x) \cdot dx + \int_0^c \frac{P}{8 \cdot \beta^3 \cdot D} f_1(\beta x) \cdot dx$$

Introduciendo dentro de la expresión anterior $f_1(\beta x)$ de la ecuación 6.22, obtenemos después de integrar

$$w = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot t} \left[2 - e^{-\beta \cdot b} \cos(\beta \cdot b) - e^{\beta \cdot c} \cos(\beta \cdot c) \right]$$

$$w = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot E \cdot t} \left[2 - f_4(\beta \cdot b) - f_4(\beta \cdot c) \right] \quad (c)$$

La máxima deflexión ocurre en media longitud de la carga distribuida en el punto en el cual $b = c$, note que, si b y c son grandes, los valores de $f_4(\beta \cdot b)$ y $f_4(\beta \cdot c)$ son completamente pequeños y la deflexión es aproximadamente igual $P \cdot a^2 / E \cdot t$.

En una manera semejante, aplicando las cuatro últimas ecuaciones de 6.23 podemos obtener la expresión para la resultante de tensión en O.

6.8. CÁSCARAS DE REVOLUCION BAJO CARGAS AXISIMETRICAS.

Vamos a considerar un cuerpo en la forma general de una cáscara de revolución sujeta a una carga simétrica rotacional, la esfera, cono y cilindro circular (sección 6.6) son geometrías típicamente simples en esta categoría. Comenzaremos definiendo el estado de resultante de tensión actuando en un punto de tal cáscara, representado por un elemento infinitesimal en la *Figura 6.6*. Condiciones de criterio de simetría que solamente las resultantes Q_ϕ , M_θ , M_ϕ , N_θ existen, y que las fuerzas normales N_ϕ y el momento de flexión M_θ no puede variar con θ . La rotación para el radio de curvatura y la orientación angular son idénticas en la teoría de la membrana (*Figura 6.2*)

El desarrollo de las ecuaciones de equilibrio de un elemento común ABCD procediendo de una manera similar al que se ha descrito en la sección 5.4.

$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta)d\phi - N\theta \cdot r_1 \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \cos\phi - Q\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot d\phi + P_y \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot r_0 \cdot d\theta = 0 \quad (a)$$

La condición de que la suma de las fuerzas en la dirección y deben ser iguales a cero es cumplida por las primeras dos y el ultimo termino de la expresión anterior especificados con la ecuación 5.2, el tercer termino es debido a las fuerzas de corte $Q\phi \cdot r_0 \cdot d\theta$ sobre las caras AC y CD del elemento, estas caras forman un ángulo $d\phi$ una con otra.

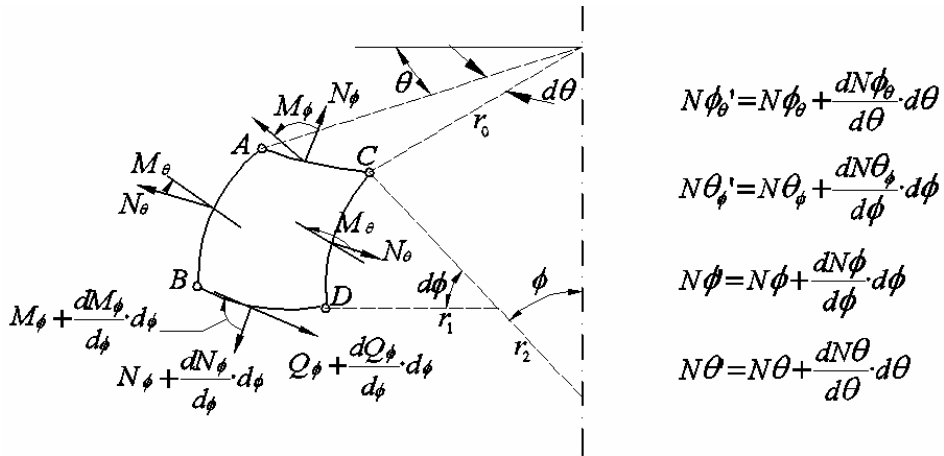


Figura 6.6 Componentes cáscara cargada axisimetricamente

La condición de equilibrio en la dirección z puede ser rápidamente obtenido por incremento de las fuerzas de corte $Q\phi \cdot r_0 \cdot d\theta$ en la ecuación (a) de la sección 5.4 que queda

$$N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot d\phi + N\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot \sin\phi + \frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0 \cdot d\theta)d\phi + P_z \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot r_0 \cdot d\theta = 0 \quad (b)$$

finalmente puede escribirse la expresión $\sum M_x = 0$

$$\frac{d}{d\phi}(M\phi \cdot r_0 \cdot d\theta)d\phi - Q\phi \cdot r_0 \cdot d\theta \cdot r_1 \cdot d\phi - M\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot \cos\phi \cdot d\theta = 0 \quad (c)$$

para el equilibrio de las fuerzas alrededor del eje x los términos de la ecuación (c) son resueltas como sigue: el primer termino es el incremento del momento de flexión $M\phi \cdot r_0 \cdot d\theta$

el ángulo representa el momento de las fuerzas de corte $Q\phi \cdot r_0 \cdot d\theta$; la tercera es la resultante de los momentos $M\theta \cdot r_1 \cdot d\phi$, note que los dos momentos vectores $M\theta \cdot r_1 \cdot d\phi$ trasladando en los lados de las caras AB y CD del elemento no son paralelos. Sus componentes rotacionales $M\theta \cdot r_1 \cdot d\phi \cdot \cos\phi$ forman un ángulo $d\theta$ uno con otro y tienen una resultante expresada por el ultimo termino.

Anulando el factor $d\theta \cdot d\phi$ en las ecuaciones (a) a (c), común a todos los términos obtenemos la ecuación de equilibrio.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}(N\phi \cdot r_0) - N\theta \cdot r_1 \cdot \cos\phi - r_0 \cdot Q\phi + r_0 \cdot r_1 \cdot P_y &= 0 \\ N\phi \cdot r_0 + N\theta \cdot r_1 \cdot \sin\phi + \frac{d(Q\phi \cdot r_0)}{d\phi} + P_z \cdot r_0 \cdot r_1 &= 0 \\ \frac{d}{d\phi}(M\phi \cdot r_0) - M\theta \cdot r_1 \cdot \cos\phi - Q\phi \cdot r_0 \cdot r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Las ecuaciones gobernantes para las cáscaras comunes de revolución sujetas a cargas axisimetricas pueden ser deducidas de las expresiones de arriba.

Cáscara cónica (Figura 6.8).- para este caso que ha sido observado en la sección (5.5) que $\phi = \text{cte}$ ($r_1 = \infty$) se tiene:

$$r_2 = s \cdot \cot\phi \quad r_1 \cdot d\phi = ds \quad N\phi = Ns \quad M\phi = Ms$$

Empleando estas relaciones, la ecuación de equilibrio 6.25 asume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(Ns \cdot S) - N\theta &= -P_y \cdot S \\ N\theta + \frac{d}{ds}(Qs \cdot S) \cdot \cot\phi &= -P_z \cdot S \cdot \cot\phi \\ \frac{d}{ds}(Ms \cdot S) - Qs \cdot S + M\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Cáscaras esféricas.- denotando por a (radio de la superficie media de la cáscara), tenemos $r_1 = r_2 = a$ y $r_0 = S \cdot \sin\phi$. La condición de equilibrio (6.26) se simplifica a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi}(Ns \cdot \text{Sen}\phi) - N\theta \cdot \text{Cos}\phi - Q\phi \cdot \text{Sen}\phi &= -Py \cdot a \cdot \text{Sen}\phi \\ N\phi \cdot \text{Sen}\phi + N\theta \cdot \text{Sen}\phi + \frac{d}{d\phi}(Q\phi \cdot \text{Sen}\phi) &= -Pz \cdot a \cdot \text{Sen}\phi \\ \frac{d}{d\phi}(M\phi \cdot \text{Sen}\phi) - M\theta \cdot \text{Cos}\phi - a \cdot Q\phi \cdot \text{Sen}\phi &= 0\end{aligned}$$

(2.27)

Cáscaras cilíndricas (*Figura 5.7*).- utilizamos la ecuación 6.26 para el caso analizado $s = x = r_2 \cdot \text{Tan}\phi$, $\phi = \pi/2$ y $r_2 = a$. Tomando estos parámetros las expresiones halladas son idénticas con las ecuaciones 6.9 de la sección 6.6

$$\begin{aligned}\frac{dNx}{dx} + Px &= 0 \\ \frac{dQx}{dx} + \frac{1}{a}N\theta + Pr &= 0 \\ \frac{dMx}{dx} - Qx &= 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

Interesantemente, la primera expresión de las ecuaciones 6.26 coincide con las correspondientes expresiones de la teoría de la membrana. Se hace notar que cancelando los términos asumiendo fuerzas de corte y momentos, las ecuaciones 6.26, 6.27 y 6.9 se reducen a la condición de la teoría de la membrana de cáscaras cónicas, esféricas y cilíndricas respectivamente.

6.9. ECUACIONES GOBERNANTES PARA DESPLAZAMIENTOS AXISIMETRICOS.

En la sección precedente ha sido observado que las tres condiciones de equilibrio (ecuaciones 6.25) de una cáscara de revolución cargada axisimetricamente conteniendo cinco términos resultantes desconocidos $N\phi$, $N\theta$, $Q\phi$, $M\phi$ y $M\theta$. Se reduce el número a tres relaciones, envolviendo las fuerzas ($N\phi$, $N\theta$), los momentos ($M\phi$, $M\theta$), y los componentes de desplazamiento (v , w), desarrollados en los párrafos que siguen.

Las deformaciones y desplazamientos de un punto de la superficie media están conectados por las ecuaciones (a) y (b) de la sección 5.6:

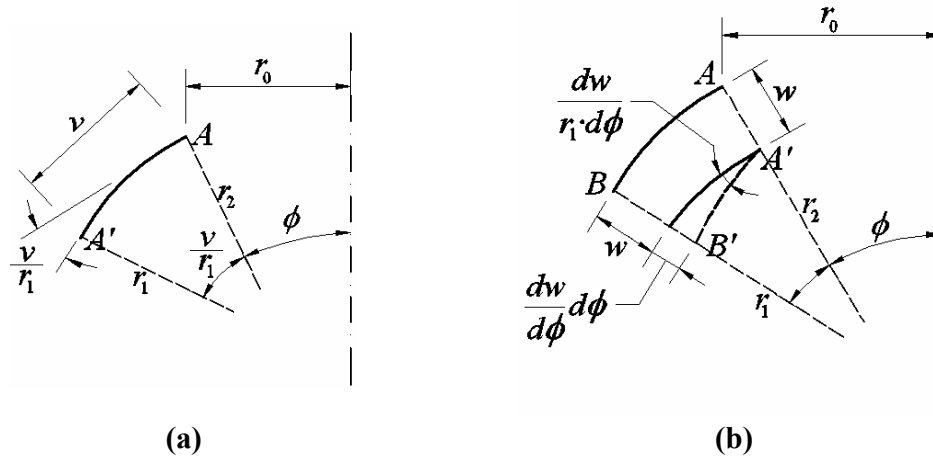


Figura 6.7 Variación de curvatura de una cáscara

$$\xi_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\phi} - \frac{w}{r_1} \quad \xi_\theta = \frac{v}{r_2} \cot \phi - \frac{w}{r_2} \quad (6.28)$$

Las relaciones de fuerza-resultante deformación (6.3) nos conduce a

$$N_\phi = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} - w \right) + \frac{\nu}{r_2} (v \cot \phi - w) \right] \quad (6.29)$$

$$N_\theta = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{r_2} (v \cot \phi - w) + \frac{\nu}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} - w \right) \right]$$

Expresiones idénticas para M_ϕ y M_θ pueden obtenerse considerando la variación de curvatura de un elemento cáscara (Figura 6.6) para este propósito examinaremos la sección meridional del elemento cáscara (Figura 6.7). La rotación de la tangente de la parte alta de la curva AC consiste de: una rotación con respecto a una perpendicular al plano meridiano por una cantidad v/r_1 pertenecientes a los desplazamientos v del punto A al punto A' (Figura 6.7a), una rotación alrededor del mismo eje por $dw/(r_1 \cdot d\phi)$ producido por un desplazamiento adicional del punto con respecto al punto A (Figura 6.7b). La rotación total del lado superior es entonces.

$$\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \quad (a)$$

La parte alta y la cara inferior del elemento inicialmente hacen un ángulo $d\phi$ una con otra.

La rotación de la cara inferior BD es entonces.

$$\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} + \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \cdot d\phi$$

La variación de curvatura del meridiano es la variación angular debido a la longitud $r_1 \cdot d\phi$ del arco, esta es entonces

$$X\phi = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \quad (6.30)$$

Si se observa que, perteneciendo a la simetría de deformación, cada lado lateral AB y CD del elemento cáscara también rota en este plano meridiano por un ángulo definido por la ecuación (a). Puede verificarse que la unidad normal de la cara derecha de un elemento cáscara tiene una componente de dirección y igual a $d\theta \cdot \cos\phi$. De este modo, la rotación de la cara CD pertenece al plano que tiene una componente con respecto al eje z dado por

$$-\left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \cos\phi \cdot d\theta$$

Dividiendo esta rotación por la longitud $r_0 \cdot d\theta$, tenemos el cambio de curvatura

$$X_\theta = \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \cdot \frac{\cos\phi}{r_0} = \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \cdot \frac{\cot\phi}{r_2} \quad (6.31)$$

Finalmente, insertando las ecuaciones 6.30 y 6.31 en la ecuación 6.3, las relaciones de momento desplazamiento son obtenidos:

$$\begin{aligned} M\phi &= -D \cdot \left[\frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) + \frac{v}{r_2} \cdot \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \cot\phi \right] \\ M\theta &= -D \cdot \left[\left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \frac{\cot\phi}{r_2} + \frac{v}{r_1} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\phi} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ahora las ecuaciones 6.25 juntamente con las ecuaciones 6.29 y 6.32 nos conducen a tres expresiones y tres incógnitas: v , w , y $Q\phi$ además, usando la primera de las tres ecuaciones resultantes, la fuerza de corte $Q\theta$ puede ser rápidamente eliminado en las ultimas dos. Las expresiones 6.25 son así reducidas a dos ecuaciones y dos incógnitas: v y w . Estos gobernando ecuaciones para desplazamientos, usualmente transformados dentro de nuevas variables, son empleadas para tratar problemas de flexión de cáscaras.

6.10. TANQUES CILINDRICOS.

Muchos tanques cilíndricos pueden ser tratados usando procedimientos similares a los descritos en las secciones anteriores. Incluyendo entre estos están: tanques con bordes no rígidos o con caras rígidas resistiendo sobre el suelo, tanques con techo y piso elásticos, tanques construidos de caras de varios espesores diferentes pero constantes.

En caso de tanques de pared de espesor variable, la solución del problema requiere integrar la ecuación 6.13^a. La rigidez flexionante D y el espesor t el mismo que no debe ser observado como constante, pero si como funcione de distancia axial x . Entonces uno debe trabajar con ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden de coeficientes variables requiriendo manipular longitudinalmente. Sin embargo en tanques de agua de concreto es usualmente común escoger una variación de espesor aumentando de arriba hacia la base. La solución se vuelve mas manejable.

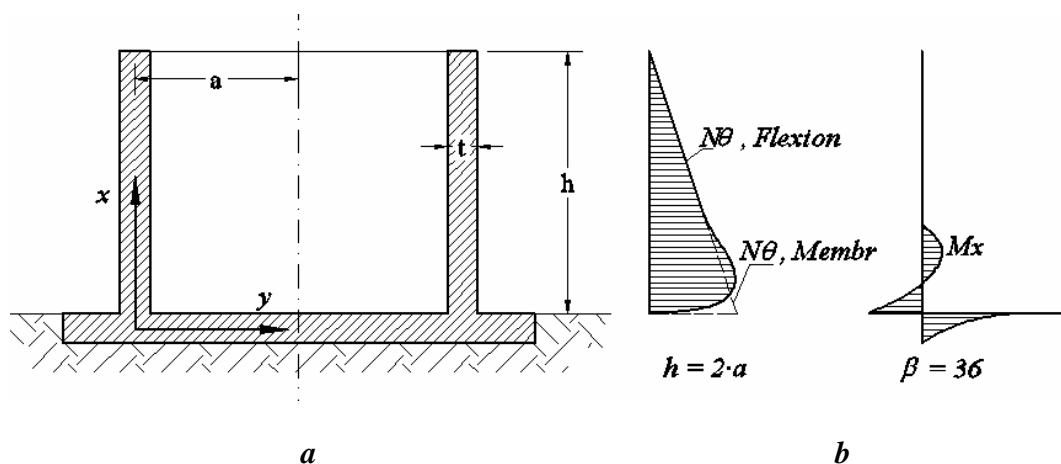


Figura 6.8 Tanque cilíndrico de espesor uniforme

Consideraremos un tanque cilíndrico de espesor uniforme enteramente llenado con líquido de peso específico γ (Figura 6.8a). La base del tanque es asumido como empotrado y la parte de arriba abierta. Las condiciones físicas indican que la parte superior es libre a la deformación y que no existe fuerza en este punto ($N_x = 0$) al igual que el lado inferior, localizando las coordenadas en la figura tenemos

$$w = 0 \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (x = 0) \quad (a)$$

De la ecuación 6.15b obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 \cdot w = -\frac{\gamma(h-x)}{D} \quad (b)$$

Donde la presión externa actuando en cualquier punto sobre la pared P_r es reemplazado por $-\gamma(h-x)$. La solución particular de la ecuación (b) esta dado como $-\gamma(h-x) \cdot a^2 / E \cdot t$

La solución general es entonces

$$w = e^{-\beta x} [C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x] + e^{\beta x} [C_3 \cdot \cos \beta x + C_4 \cdot \sin \beta x] - \frac{\gamma(h-x)a^2}{E \cdot t} \quad (c)$$

Si t es pequeño con relación a a y h , como usualmente es el caso, una presión de unidad de ancho de un cilindro puede ser considerado infinitamente largo. Como siempre fue observado en la sección 6.7 que, porque w debe ser finito para todo x , $C_3 = C_4 = 0$ en la expresión de arriba.

Ahora nosotros satisfacemos las condiciones restantes, sustituyendo las ecuaciones (a) en las ecuaciones (c)

$$w = C_1 - \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot h}{E \cdot t} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = \beta(C_1 - C_2) + \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} = 0$$

Del cual
$$C_1 = \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot h}{E \cdot t} \quad C_2 = \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} \left(h - \frac{1}{\beta} \right)$$

La deflexión radial del tanque es dado

$$w = -\frac{\gamma \cdot a^2 \cdot h}{E \cdot t} \left[1 - \frac{x}{h} - e^{-\beta x} \left[\cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right) \cdot \text{Sen} \beta x \right] \right]$$

o

$$w = -\frac{\gamma \cdot a^2 \cdot h}{E \cdot t} \left[1 - \frac{x}{h} - f_4(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right) f_2(\beta x) \right] \quad (6.33)$$

donde $f_2(\beta x)$ y $f_4(\beta x)$ son definidos por la ecuación 6.22. Usando la tabla 6.1 la deflexión en cualquier punto es fácilmente determinado de la ecuación de arriba. La ecuación 6.15a, después de integrar, el desplazamiento axial es

$$u = \int_0^h v \frac{w}{a} dx + u_0$$

Donde la constante de $u(0)$, es $u_0 = 0$

A continuación evaluaremos las resultantes de tensión de las ecuaciones 6.11 y 6.12 juntamente con 6.10a y 6.33

$$N\theta = -\frac{E \cdot t \cdot w}{a} = \gamma \cdot a \cdot h \left[1 - \frac{x}{h} - f_4(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right) f_2(\beta x) \right]$$

$$Mx = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot D \cdot h}{E \cdot t} \left[f_4(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right) f_2(\beta x) \right]$$

$$M\theta = v \cdot Mx \quad (6.34)$$

El máximo momento de flexión ocurre en la base del tanque, a $x = 0$

$$Mx_{max} = \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right) \frac{2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot D \cdot h}{E \cdot t} \quad (6.35)$$

La resultante de tensión $N\theta$, de acuerdo a la teoría de la membrana es dado por la ecuación 5.30a, por sustitución de $Pr = -\gamma(h - x)$

$$N\theta = \gamma(1 - x)a \quad (d)$$

En el punto $x = 0$, $N\theta$ asume el máximo valor $N\theta_{max}$

$$N\theta_{max} = \gamma \cdot h \cdot a$$

Basado en la teoría membranal, la máxima tensión es entonces

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{1}{t} \gamma \cdot h \cdot a \quad (e)$$

Podemos observar que la fuerza resultante correspondiente a la solución particular, es

$$w_p = -\gamma(h-z) \frac{a^2}{E \cdot t}$$

De la ecuación 6.34

$$N\theta = -\frac{E \cdot t}{a} w_p = \gamma(h-x)a$$

La expresión de arriba igualado con la ecuación (d) es tal como se dedujo aplicando la teoría membranal, esta condición es también válida para otros casos.

De acuerdo a la teoría de flexión, $N\theta = 0$ y Mx es máximo en el punto $x = 0$

$$\sigma_{x \max} = \frac{Mx_{max}}{t^2 / 6}$$

$$\sigma_{x \max} = \frac{6 \cdot Mx_{max}}{t^2} = \frac{12 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot D \cdot h}{E \cdot t} \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot h} \right)$$

Introduciendo

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{y} \quad \beta^2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} / a \cdot t$$

En la expresión de arriba y considerando los términos $1/\beta \cdot h$ y ν^2 como muy pequeños con la unidad, tenemos

$$\sigma_{x \max} = \frac{\sqrt{3}}{t} \gamma \cdot h \cdot a \quad (f)$$

Comparando las ecuaciones (e) y (f), se observa que la tensión máxima verdadera es de hecho $\sqrt{3}$ veces mas grande que la que da la teoría membranar. Una grafica de las ecuaciones 6.34 es presentado en la *Figura 6.8b*, donde la línea segmentada y la línea continua denota la distribución de la resultante de tensión de acuerdo a la teoría membranar y la teoría de flexión respectivamente. La figura muestra que la teoría de la membrana es valida fuera del extremo fijo de un cilindro delgado y largo en comparación con un cilindro corto de pared gruesa, sin embargo, las deficiencias en los resultados dados por ambas teorías son pronunciados en la parte inferior media de la cáscara. En algunos casos, la teoría membranar se puede aplicar de manera apropiada sobre la porción superior del tanque.

6.10. COMPARACIONES DE TENSIONES FLECCIONANTES Y MEMBRANALES.

La ecuación para las tensiones resultantes 6.29 y 6.32 pueden ser usados para medir la exactitud del análisis membranar presentado en el capítulo anterior. La determinación de momentos flectores, el cual fuera omitido en la teoría membranar, las expresiones desarrolladas para los desplazamientos en la sección 5.6 son introducidas dentro la ecuación 6.32. Las tensiones flectantes son obtenidas de las ecuaciones 6.4, sobre la composición de magnitudes de tensión determinados con estas tensiones de membrana, conclusiones pueden ser inducidas respecto a la exactitud de la teoría membranar, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2.- considerar un domo esférico sujetando su peso propio descrito en el ejemplo 5.1 asumiendo que esta simplemente apoyado como se muestra en la *Figura 5.9a*. a) Determine las tensiones de flexión, b) compare las tensiones de flexión y membranar.

Solución.- a) los desplazamientos v y w de las ecuaciones (g) y (c) de la sección 5.6 juntamente con la ecuación 5.13, son

$$v = \frac{a^2 \cdot p \cdot (1 + \nu)}{E \cdot t} \left(\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \phi} + \ln \frac{1 + \cos \phi}{1 + \cos \alpha} \right) \sin \phi$$

$$w = v \cdot \text{Cot} \phi - \frac{a^2 \cdot p}{E \cdot t} \left(\frac{1+v}{1+\text{Cos} \phi} - \text{Cos} \phi \right) \quad (a)$$

Introduciendo la expresión anterior dentro la ecuación 6.32 da la siguiente expresión para los momentos:

$$M\theta = M\phi = \frac{t^2 \cdot p}{12} \cdot \frac{2+v}{1-v} \cdot \text{Cos} \phi \quad (b)$$

La magnitud de la tensión de momento σ_b en la superficie de la cáscara es dado por

$$\sigma_b = \frac{p}{2} \cdot \frac{2+v}{1-v} \cdot \text{Cos} \phi \quad (c)$$

b) el valor de la tensión de membrana σ según la ecuación 5.13 es

$$\sigma = \frac{a \cdot p}{t(1+\text{Cos} \phi)}$$

la relación de la tensión de flexión a la tensión de membrana,

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} = \frac{2+v}{2(1-v)} \cdot \frac{t}{a} (1+\text{Cos} \phi) \cdot \text{Cos} \phi \quad (d)$$

teniendo un valor máximo en la parte superior de la cáscara ($\phi = 0$), para $v = 0.3$

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma} \right)_{\max} = 3.29 \frac{t}{a} \quad (e)$$

Para la cáscara delgada ($a > 20t$) la relación de arriba es pequeña. De este modo podemos ver que la teoría membranar proporciona un resultado suficientemente exacto.

Los valores de las fuerzas $N\theta$ y $N\phi$ pueden ser determinados introduciendo la ecuación (b) dentro la ecuación 6.27, sin embargo, puede verificarse que estas aproximaciones erradas para las fuerzas, difieren poco de los resultados membranar.

Podemos concluir del anterior ejemplo que, para cáscaras delgadas las tensiones (y desplazamientos) son cercanos a los de la teoría de la membrana, tienen valores de aceptable exactitud. Estos resultados, por supuesto que pueden ser inexactos si la expresión

del límite de la cáscara es prevenida por un apoyo. En el último caso, las fuerzas externas por el apoyo sobre la cáscara producen flexiones en las cercanías del límite de la cáscara. Las tensiones locales causadas por las fuerzas concentradas discutidas en la sección 6.7, merecen un tratamiento con considerable detalle.

6.11. REPRESENTACIONES DE ELEMENTOS FINITOS DE CÁSCARAS DE FORMA GENERAL.

Los factores que complican el análisis de los problemas de cáscara pueden generalmente ser reducidos a irregularidades en la forma o espesor de la cáscara y la no uniformidad de la carga aplicada. Reemplazando la geometría real de la estructura y la configuración de la carga aplicada con aproximación de elementos finitos adecuados se encuentra un pequeño sacrificio en la exactitud.

Consideremos el caso de una cáscara de espesor variable y forma general arbitraria.

Hay un número de posibilidades de obtener una cáscara equivalente el cual no se compromete significativamente de la respuesta clásica. Por ejemplo, uno puede reemplazar la cáscara real con una serie de elementos triangulares curvas o planos (rectos) o elementos finitos de otras formas, conectados a sus bordes y esquinas. Cualquiera que fuese la configuración de la carga verdadera puede ser, reducido a una serie de fuerzas concentradas o distribuidas aplicadas a cada elemento finito.

Cuando una cáscara de revolución es sujeto a una carga no uniforme; el elemento finito usual o aproximado reemplaza un elemento cáscara con dos elementos planos uno sujeto a la fuerza aplicada puede ser convertido a fuerzas uniformes o concentradas también actuando sobre los elementos reemplazantes. Dado que un elemento cáscara puede ser desarrollado como una combinación de un elemento membrana y un elemento plano de la misma placa. La cáscara es así idealizada como un ensamblaje de elementos planos.

Elementos curvos han sido propuestos como segura e imprecisa aproximación de cáscaras, pero en el análisis empleado es más complejo que el caso usando elementos rectos. En el

tratamiento general de cáscaras cargadas axisimetricamente proporcionados en la sección siguiente, estos últimos elementos (rectos) son considerados.

6.12. SOLUCION DE CÁSCARAS CARGADAS AXISIMETRICAMENTE CON ELEMENTOS FINITOS.

Una cáscara cargada axisimetricamente puede ser representado por una serie de elementos cónicos (*Figura 6.9a*), cada elemento es así generado circularmente por un segmento de línea recta entre dos círculos paralelos o “nudos”, denominados i e j *figura 6.9b*. El espesor puede varia de elemento a elemento. El desplazamiento de un punto en la superficie media es especificado por dos componentes v y w en las direcciones meridional y circular respectivamente.

Refiriéndonos a la *figura 6.9b* las relaciones deformación desplazamiento simplemente son:

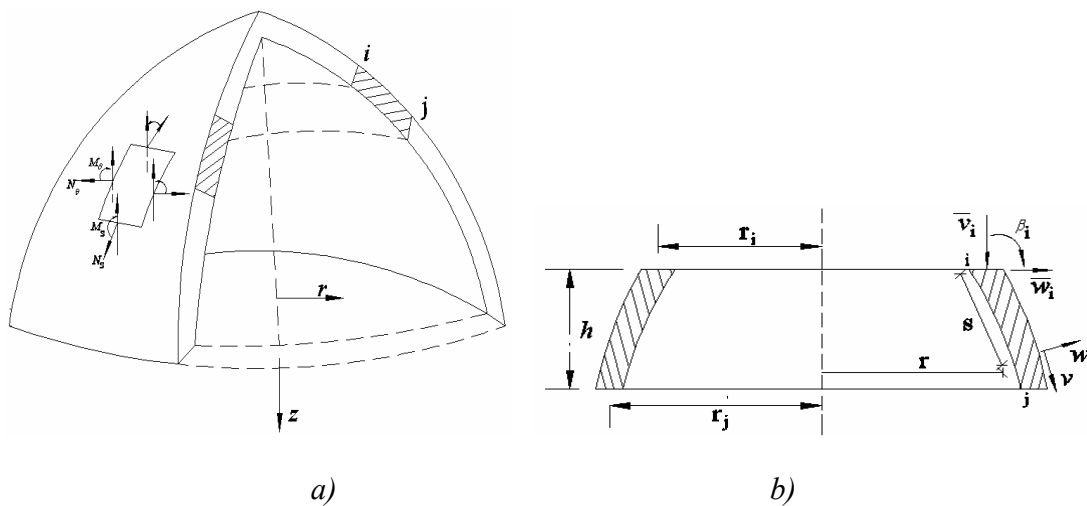


Figura 6.9 Relación deformación desplazamiento

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ X_s \\ X_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dv}{ds} \\ (\omega \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) / r \\ -\frac{d^2 \omega}{ds^2} \\ -\left(\frac{d\omega}{ds}\right) \cdot \sin \theta / r \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

Las relaciones resultante deformación son:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E_t}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu \cdot t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu \cdot t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ X_s \\ X_\theta \end{Bmatrix} \quad (6.36a)$$

O

$$\{N_s, N_\theta, M_s, M_\theta\} = [\Pi] \cdot \{\varepsilon\} \quad (6.36b)$$

Aquí $[\Pi]$ es la matriz de elasticidad para una cáscara isotropita cargada axisimetricamente.

Tres desplazamientos son escogidos en cada nudo (*figura 6.9b*). La matriz del desplazamiento nodal del elemento es:

$$\{\delta\}_\ell = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_i & \bar{\omega}_i & \bar{\beta}_i \\ \bar{v}_j & \bar{\omega}_j & \bar{\beta}_j \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

Donde \bar{v} , $\bar{\omega}$ y $\bar{\beta}$ representan el movimiento axial, movimiento radial y rotación respectivamente. Los desplazamientos dentro del elemento, expresados en forma normal, son.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} v \\ \omega \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}_\ell \quad (6.38)$$

Estos son determinados de $\{\delta\}_\ell$ y la posición s , continuidad de inclinación y desplazamientos son mantenidos por todo el elemento. La matriz $[N]$ es función de forma que debe ser desarrollado. Evaluando v y ω de los nudos i y j podemos relacionarlos a

las ecuaciones (6.36) a través del uso de una transformación de matriz. Para el nudo i por ejemplo.

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ d\omega/ds \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varnothing & \text{sen} \varnothing & 0 \\ -\text{sen} \varnothing & \cos \varnothing & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\omega}_i \\ \bar{\beta}_i \end{Bmatrix} = [\lambda] \cdot \{\delta_i\} \quad (6.39)$$

Las siguientes expresiones generales, empleadas para $\{\delta\}$ contienen seis componentes:

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot s$$

$$\omega = \alpha_3 + \alpha_4 \cdot s + \alpha_5 \cdot s^2 + \alpha_6 \cdot s^3 \quad (6.40)$$

Para determinar los valores de los alfas (α), la coordenada s del punto nodal son sustituidos en las funciones de desplazamiento (6.40). Esto genera seis ecuaciones en el cual las incógnitas son solamente coeficientes. Haciendo esto, podemos resolver para α_1 a α_6 en términos de los desplazamientos nodales v_i, \dots, ω_i y finalmente obtenemos.

$$\begin{Bmatrix} v \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s_1^2+2s_1^3 & s_1(1-2s_1+s_1^2) \\ 0 & s_1 & s_1^2(3-2s_1) \\ 0 & s_1^2(3-2s_1) & s_1^2(-1+s_1) \end{bmatrix} h \begin{Bmatrix} v_i \\ \omega_i \\ (d\omega/ds)_i \\ v_j \\ \omega_j \\ (d\omega/ds)_j \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

Donde.

$$s_1 = \frac{s}{h} \quad (0 \leq s_1 \leq 1) \quad (a)$$

Como se muestra en las ecuaciones (6.41) que la matriz es de dos por seis para la matriz de cargas $[P]$, tenemos.

$$\begin{Bmatrix} v \\ \omega \end{Bmatrix} = [P] \cdot \begin{Bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{Bmatrix} \cdot \{\delta\}_\ell = [\bar{P}_i] \cdot [\lambda] ; [\bar{P}_j] \cdot [\lambda] \cdot \{\delta\}_\ell = [P] \cdot \{\delta\}_\ell \quad (6.42)$$

Las ecuaciones (6.38) nos conducen a;

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\varepsilon\}_\ell = [[B_i] \cdot [\lambda] ; [B_j] \cdot [\lambda]] \cdot \{\delta\}_\ell \quad (6.43)$$

En el cual:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 1/h & 0 & 0 \\ (-s_1 + 1)\text{sen}\varnothing/r & (1 - 3s_1^2 + 2s_1^3)\cos\varnothing/r & h \cdot s_1(1 - 2s_1 + s_1^2)\cos\varnothing/r \\ 0 & 6(1 - 2s_1)/h^2 & 2(2 - 3s_1)/h \\ 0 & 6s_1(1 - s_1)\text{sen}\varnothing/rh & (-1 + 4s_1 - 3s_1^2)\text{sen}\varnothing/r \end{bmatrix} \quad (6.43a)$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 1/h & 0 & 0 \\ s_1 \cdot \text{sen}\varnothing/r & s_1^2(3 - 2s_1)\cos\varnothing/r & h \cdot s_1^2(-1 + s_1)\cos\varnothing/r \\ 0 & 6(-1 + 2s_1)/h^2 & 2(1 - 3s_1)/h \\ 0 & 6s_1(-1 + s_1)\text{sen}\varnothing/rh & s_1(2 - 3s_1)\text{sen}\varnothing/r \end{bmatrix} \quad (6.43b)$$

La matriz de rigidez para el elemento es dado por;

$$[K]_\ell = \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA \quad (b)$$

Aquí el área del elemento es igual;

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot ds = 3 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot ds_1 \quad (c)$$

Reemplazando el valor de (c) en (b);

$$[K]_\ell = 2\pi \cdot h \int_0^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot r \cdot ds_1 \quad (6.44)$$

Claramente, el radio r debe ser expresado como función de s antes de integrar la anterior ecuación. Para la solución debemos seguir los siguientes pasos:

1.- Determinar la matriz de rigidez $[K]_\ell$ en términos de las propiedades del elemento.

2.- Determinar las fuerzas nodales en términos de la carga aplicada $\{Q\}_\ell$.

3.- Determinar los desplazamientos nodales satisfaciendo las condiciones de contorno $\{\delta\} = \{K\}^{-1} \cdot \{Q\}$.

Las deformaciones se determinan de las ecuaciones (6.43), las resultantes de tensión de las ecuaciones (6.36). En las cáscaras de revolución cargadas axisimetricamente, fuerzas “concentradas” o “nodales” son realmente cargas axisimetricas distribuidas alrededor de la cáscara.

Si solamente se requeriría la solución de la teoría menbranal, los valores $X_s, X_\theta, \beta, M_s, M_\theta$ son ignorados y las expresiones desarrolladas son considerablemente reducidas en complejidad.

CAPITULO 7

MALLAS ESPACIALES

7.1. INTRODUCCIÓN.

Denominamos Estructura Espacial (mallas espaciales) al elemento resistente formado por la yuxtaposición en el espacio de módulos con distintas formas geométricas. Las mallas espaciales abarcan el campo de las estructuras de cubiertas de grandes luces, al hablar de mallas espaciales nos referimos a aquellas estructuras formadas por barras y nudos que se ensamblan formando poliedros sencillos que, por repetición conforman una superficie apta para su función estructural. Según la disposición de estos elementos entre sí mismos pueden ser de base cuadrada o triangular.

La potencialidad de las mallas espaciales como solución estructural en el campo de las estructuras de grandes luces está fuera de toda duda y su adecuación aparece avalada por numerosas realizaciones, desde la primera propuesta de graham bell en 1.907 para aparatos voladores, hasta una de las realizaciones más emblemáticas como es el palau sant jordi para los juegos olímpicos de barcelona en 1.992, obra del arquitecto arata isozaki en colaboración con el prestigioso ingeniero mamoro kawaguchi.

La fabricación por medio de control numérico da mucha libertad de diseño. La única limitación esta entre el ángulo entre barras, que deberá ser mayor a 40° , aunque puntualmente puede ser menor.

Si la superficie a diseñar es de doble curvatura y puede absorber fuertes esfuerzos en los bordes hay que emplear estructuras laminares. Si es plana se le deberá dar suficiente inercia. Hay que cuidar la modulación, trabajar con el menor número de nudos posible, sobre todo en estructuras fundamentadas en la inercia. Siguiendo las anteriores pautas se consigue optimizar el coste. En general la optimización será mayor cuanto mayores sean

las luces, permitiendo al sistema conseguir hasta cientos de metros; como se observa en la *figura 7.1.*



Figura 7.1.- Parque Biológico (Madrid).

Esta solución permite una gran versatilidad de soluciones estructurales para la construcción de cubiertas de grandes luces pudiendo aplicarse en muy diversas realizaciones. Se consiguen soluciones geométricas muy complejas y con un gran nivel estándar de acabado. Además son estructuras de gran ligereza y rápido montaje.

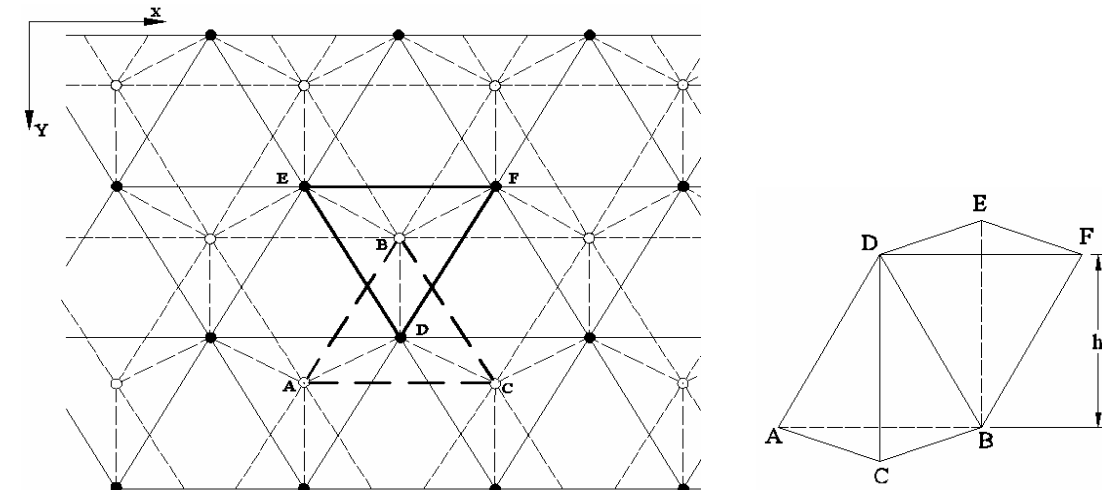
7.2. CÁLCULO DE MALLAS POR ASIMILACIÓN A ESTRUCTURAS CONTINUAS.

El método general aquí expuesto se basa en la asimilación de la malla espacial a estructuras continuas, homogéneas e isótropas. La malla a estudiar a de reunir, por consiguiente, unas ciertas condiciones e isotropía para ser posible esta asimilación pues, de lo contrario, implicara su sustitución por estructuras continuas anisótropas, proceso excesivamente complejo en la mayor parte de los casos. A partir de los esfuerzos hallados en estas estructuras de asimilación se obtienen las compresiones y tracciones existentes en las barras que definen la malla real.

Se desarrolla a continuación el cálculo de distintas mallas especiales asimiladas a una estructura laminar.

7.2.1. Mallas Tetraedricas.

Considerando, las mallas formadas por la yuxtaposición de elementos tetraédricos de lados iguales, de longitud l , en las caras situadas en las partes superior e inferior de la malla.



● Barras y nudos superiores.

○ Barras y nudos inferiores.

Tenemos pues:

$$AB = BC = CA = DE = EF = DF = l$$

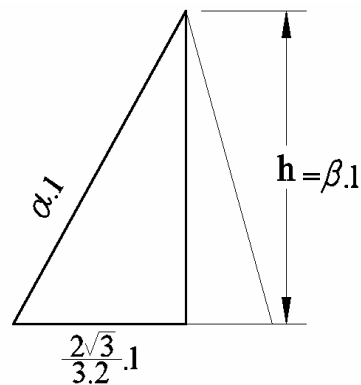
Las barras que unen las caras de la malla (barras diagonales) tienen todas ellas la misma longitud, pero no necesariamente igual a l :

$$EB = FB = DA = BD = DC = \alpha \cdot l$$

De esta forma, llamando h al canto de la malla, tenemos:

$$h = \beta \cdot l$$

Y por consiguiente tenemos

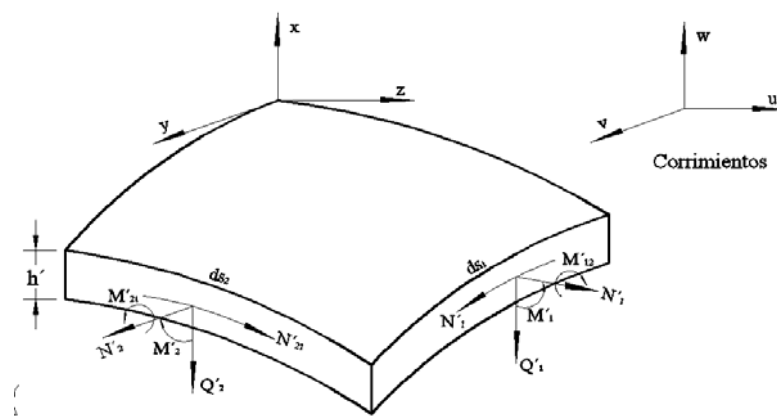


$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{3}} ; \quad h = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{3}} \cdot l$$

7.2.2. Proceso De Cálculo.

Este proceso de cálculo consta de los siguientes pasos:

1º.- Determinación de las expresiones de los esfuerzos $N'_1, N'_2, N'_{12}, N'_{21}, M'_1, M'_2, M'_{12}, M'_{21}, Q'_1, Q'_2$ como se muestra en el esquema, en una lamina continua, homogénea e isotrópica de canto h' , módulo de elasticidad E' , módulo de Poisson ν' , módulo de elasticidad transversal G' y de forma y resto de las dimensiones igual a la malla considerada. Suponemos aquí conocida las expresiones que permiten obtener los esfuerzos en las estructuras laminares.



2º.- determinación, en función de los esfuerzos de lámina, de las tracciones y compresiones en las barras reales de la malla.

3º.- Deformaciones que estas tracciones y compresiones producen en la malla.

4º.- Determinación, apartir de estas deformaciones, de las características de la lámina definida en 1: canto h' , módulo de elasticidad E' , módulo de poisson ν' y el módulo de elasticidad transversal G' .

5º.- Cálculo de las esfuerzos de lámina una vez conocidos los valore determinados de h' , E' , ν' y G' .

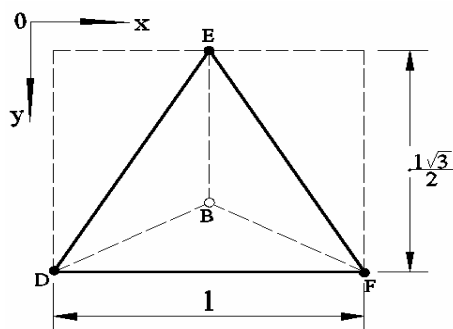
6º.- Cálculo de las tracciones y compresiones en las barras de las mallas sustituyendo, en las expresiones halladas en 2, los valores de $N'_1, N'_2, N'_{12}, N'_{21}, M_1, M_2, M'_{12}, M'_{21}, Q'_1$ y Q'_2 .

7º.- Cálculo apartir de los esfuerzos hallados, de las deformaciones de la lámina de sustitución, que consideraremos igual a las de la malla.

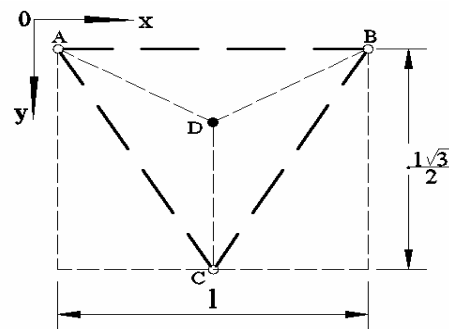
NOTA.- En el proceso se supone que las cargas exteriores están aplicadas en los nudos de la malla, por lo que no es valido el cálculo para cargas actuando a lo largo de las barras que la definen.

7.2.3. Determinación, de las tracciones y compresiones en las barras de la malla en función de los esfuerzos de lámina.

Estudiaremos las tracciones y compresiones en las barras (contenidas) en un elemento rectangular circunscrito a uno de los triángulos de las caras de la malla (elemento de malla considerado), suponiendo que los esfuerzos de lámina actúan en los nudos situados en dicho elemento (adecuación al estado de cargas real a que esta sometido la malla).



Elemento contenido un triangulo superior



Elemento contenido un triangulo inferior

Para hallar el valor del esfuerzo de lámina, actuando en el elemento estudiado, se multiplicará su valor por la longitud del lado del elemento sobre el que actúa, repartiéndose

entre las dos caras de la lámina si se considera su campo de aplicación sobre la superficie media.

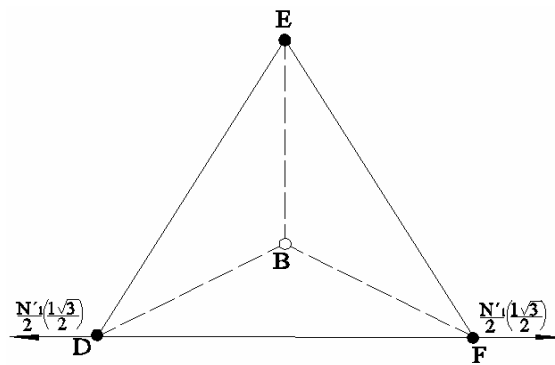
Tracciones y compresiones debidas al esfuerzo normal N'_1 .

Considerando que N'_1 actúa en la forma indicada en el esquema, su efecto es, en la cara superior:

$$P \cdot \frac{N'_1}{DF} = \frac{3 \cdot l}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_1$$

Análogamente en la inferior:

$$P \cdot \frac{N'_1}{AB} = \frac{3 \cdot l}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_1$$

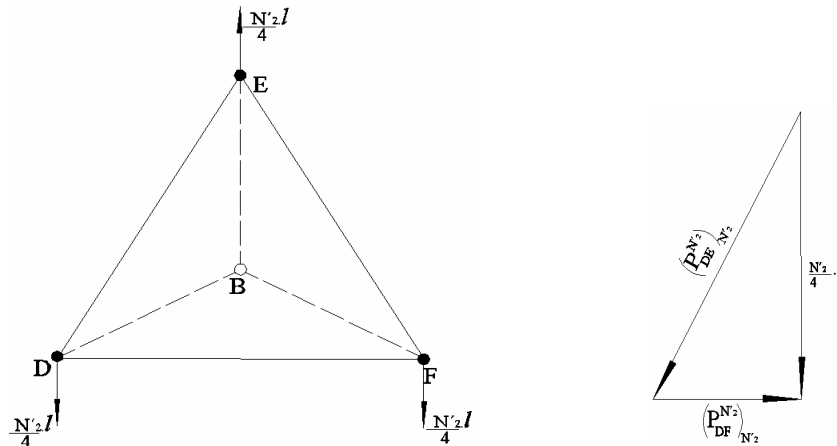


Efecto del esfuerzo N_1

Tracciones y compresiones debidas al esfuerzo normal N'_2 .

Suponiendo N'_2 aplicando en la forma indicada en el esquema, del necesario equilibrio del nudo D obtenemos:

$$\frac{\frac{N'_2 \cdot l}{4}}{\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{P \cdot \frac{N'_2}{DF}}{\frac{1}{2}}, \text{ de donde; } P \cdot \frac{N'_2}{DF} = \frac{l}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$$



Se coloca el signo menos para indicar que la barra DF está comprimida bajo esta sollicitación (se mantiene este criterio durante todo el proceso).

Así mismo tenemos:

$$\frac{\frac{N'_2 \cdot l}{4}}{\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{P_{DE}^{N'_2}}{l} ; \quad P_{DE}^{N'_2} = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$$

Y por simetría: $P_{EF}^{N'_2} = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$

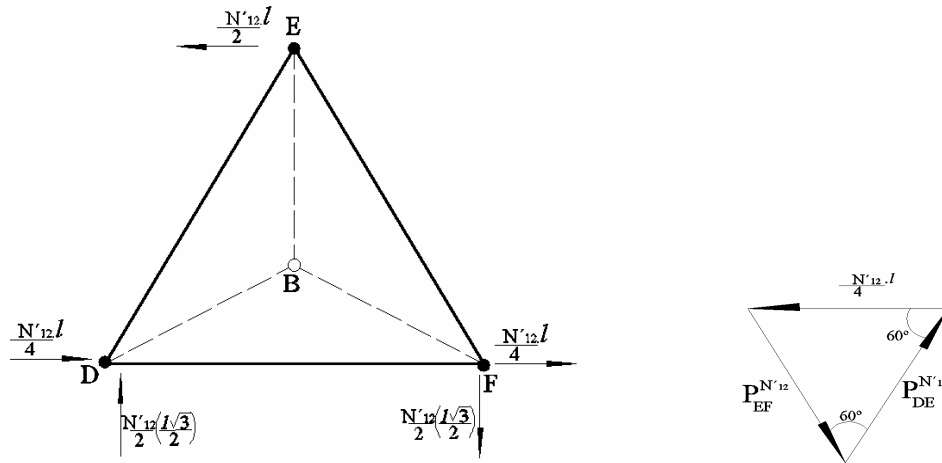
Por consiguiente en la cara inferior:

$$P_{AB}^{N'_2} = \frac{l}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2 ; \quad P_{AC}^{N'_2} = P_{BC}^{N'_2} = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$$

Tracciones y compresiones debidas a N'_{12} y N'_{21} .

El equilibrio de momentos, representados por vectores según el eje Z , nos indica:

$N'_{12} = N'_{21}$. Suponiendo aplicados estos esfuerzos para el equilibrio del nudo E se obtiene:



$$P_{DE}^{N'_{12}} = -\frac{l}{2} \cdot N'_{12} \quad ; \quad P_{EF}^{N'_{12}} = -\frac{l}{2} \cdot N'_{12}$$

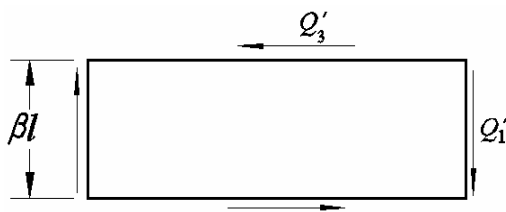
Del equilibrio del nudo D : $P_{DF}^{N'_{12}} = 0$

Así mismo para la cara inferior tenemos:

$$P_{AC}^{N'_{12}} = -P_{BC}^{N'_{12}} = \frac{l}{2} \cdot N'_{12} \quad ; \quad P_{AB}^{N'_{12}} = 0$$

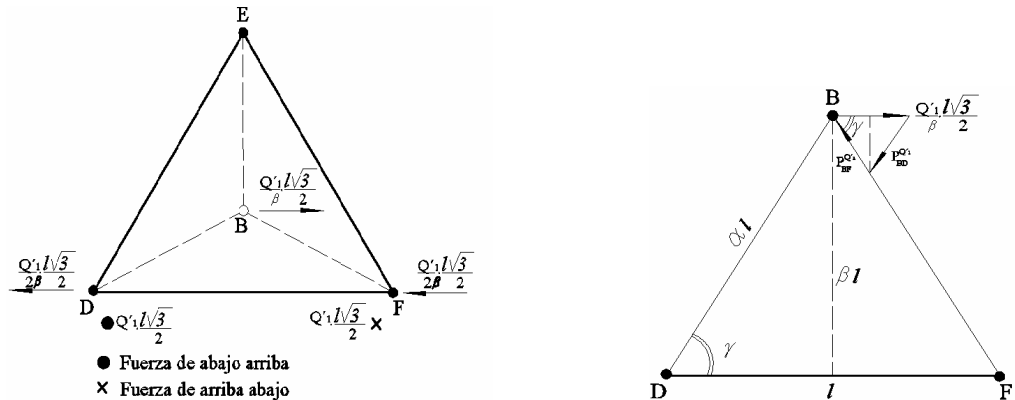
Tracciones y compresiones debidas a efecto de corte Q'_1 .

El esfuerzo cortante Q'_1 presupone la existencia de Q'_3 para que se mantenga el equilibrio del elemento al prescindir de los incrementos de los momentos flectores y torsores .



$$Q'_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \right) \cdot l = Q'_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \right) \cdot \beta \cdot l$$

De donde: $Q'_3 = \frac{Q'_1}{\beta}$



Suponiendo aplicados estos esfuerzos tal y como se indica en la figura y admitiendo la hipótesis de que serán resistidos en su totalidad por las barras diagonales, podemos plantear el equilibrio en el nudo.

$$P_{BD}^{Q'_1} = -P_{BF}^{Q'_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q'_1}{\beta} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\cos \gamma}$$

Siendo:

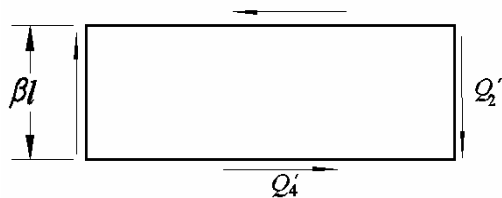
$$\cos \gamma = \frac{\frac{l}{2}}{\alpha \cdot l} = \frac{1}{2 \cdot \alpha}$$

De donde:

$$P_{BD}^{Q'_1} = -P_{BF}^{Q'_1} = \frac{\sqrt{3} \cdot l \cdot \alpha}{2 \cdot \beta} \cdot Q'_1$$

Tracciones y compresiones debidas a Q'_2 .

Al igual que la deducción anterior, usaremos, aquí, el esfuerzo Q'_4 . Valor de Q'_4 :

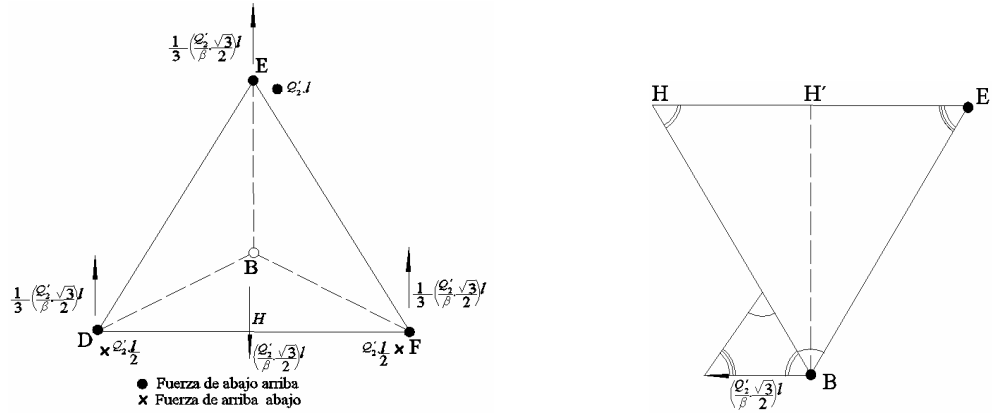


$$Q'_2 + \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2} = Q'_4 + \beta \cdot l$$

Y por consiguiente:

$$Q'_4 = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \beta} \cdot Q'_1$$

Las fuerzas que actúan en el elemento de la malla considerado están representadas en el esquema. Del equilibrio del nudo B , y recordando se obtiene:



$$HE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l; \quad HH' = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}}; \quad BE = \alpha \cdot l; \quad H'B = \beta \cdot l$$

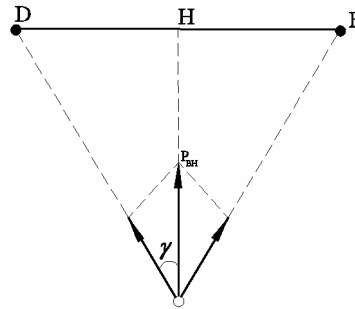
$$BH = \sqrt{BH'^2 + HH'^2} = \sqrt{\beta^2 \cdot l^2 + \frac{l^2}{12}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{12 \cdot \beta^2 + 1}$$

Obtenemos:

$$P_{BE}^{Q'_2} = \left(\frac{Q'_2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \beta} \right) \cdot l \cdot \frac{\alpha \cdot l}{\frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}}; \quad \text{esto es: } P_{BE}^{Q'_2} = \frac{\alpha \cdot l}{\beta} \cdot Q'_2$$

$$P_{BH}^{Q'_2} = \left(\frac{Q'_2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \beta} \right) \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{12 \cdot \beta^2 + 1} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}}; \quad P_{BH}^{Q'_2} = \frac{l \cdot \sqrt{12 \cdot \beta^2 + 1}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \cdot Q'_2$$

Y, por tanto, gráficamente:



$$DF = l; \quad DF = DB = \alpha \cdot l$$

$$P_{DF}^{Q'_2} = P_{BD}^{Q'_2} = -\frac{2}{1} \cdot P_{BH}^{Q'_2} \cdot \frac{1}{\cos \gamma}$$

Siendo:

$$\cos \gamma = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{12 \cdot \beta^2 + 1}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha}$$

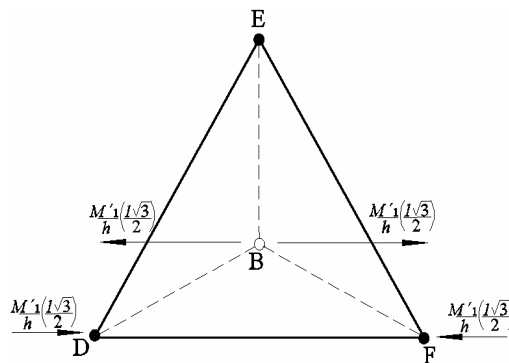
De donde, sustituyendo los valores de $P_{BH}^{Q'_2}$ y $\cos \gamma$:

$$P_{DF}^{Q'_2} = P_{BD}^{Q'_2} = -\frac{\alpha \cdot l}{2 \cdot \beta} \cdot Q'_2$$

Tracciones y compresiones debidas a M_1 .

Sustituyendo el esfuerzo M'_1 por dos fuerzas, $\frac{M'_1}{h}$, actuando en las caras de la malla espacial, y suponiendo aplicadas estas fuerzas tal y como indica a continuación:

$$P_{DF}^{M'_1} = -\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot h} \cdot M'_1$$



(Teniendo en cuenta que M'_1 actúa sobre un borde del elemento de longitud $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$), de donde:

$$P_{DF}^{M'_1} = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_1$$

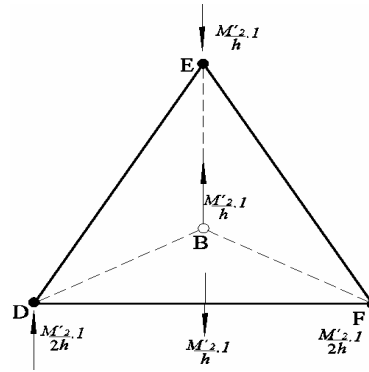
Análogamente, en la cara inferior:

$$P_{AB}^{M'_1} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_1$$

Los signos de $P_{DF}^{M'_1}$ y $P_{AB}^{M'_1}$ son debidos a que el esfuerzo M'_1 , positivo, produce compresiones en las barras de la cara superior y tracciones en la cara inferior.

Tracciones y compresiones debidas a M_2 .

Sustituyendo el esfuerzo M'_2 por dos fuerzas, $\frac{M'_2}{h}$, y suponiendo que están aplicadas en la forma indicada en la figura 7.18, se tiene:



Equilibrio del nudo E:

$$P_{ED}^{M'_2} = P_{EF}^{M'_2} = -\frac{M'_2}{\beta \cdot l} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} ; \quad \text{De donde: } P_{ED}^{M'_2} = P_{EF}^{M'_2} = -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_2$$

Equilibrio del nudo D:

$$P_{DF}^{M'_2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_2 \cdot \frac{l}{l} \quad ; \text{ y por consiguiente: } P_{DF}^{M'_2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_2$$

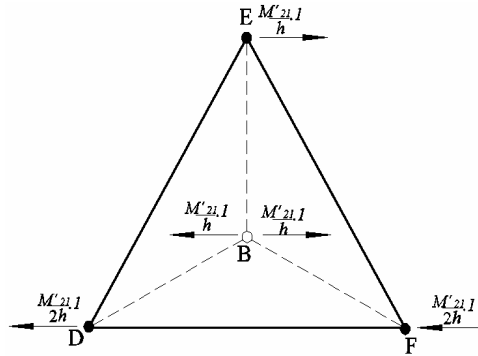
Análogamente en la cara inferior:

$$P_{AC}^{M'_2} = P_{BC}^{M'_2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_2; \quad P_{AB}^{M'_2} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \cdot M'_2$$

Tracciones y compresiones debidas a M'_{21} .

Sustituyendo el esfuerzo M'_{21} por dos fuerzas de valor $\frac{M'_{21}}{h}$, y suponiéndolas aplicadas como indica el esquema, tenemos planteado el equilibrio en el nudo **E**:

$$P_{ED}^{M'_{21}} = -P_{EF}^{M'_{21}} = \frac{M'_{21}}{\beta}$$



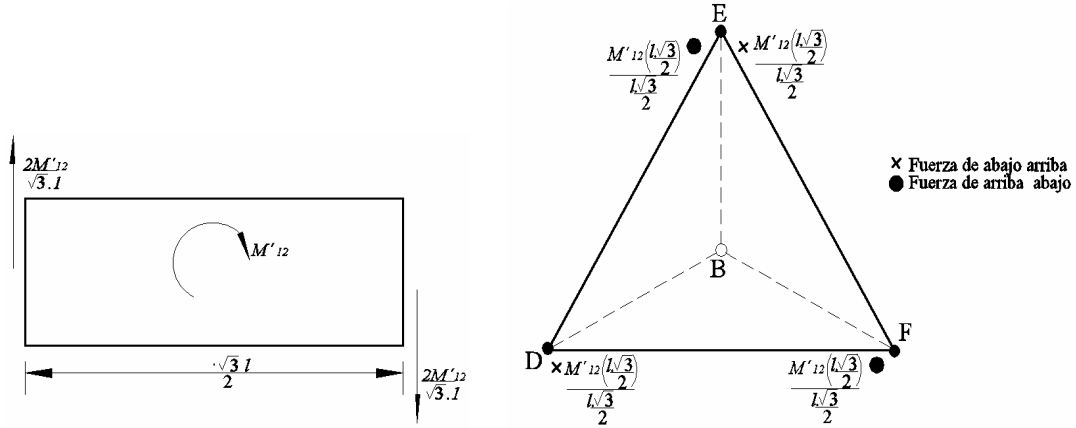
El equilibrio en los nudos **D** y **F** se alcanza teniendo en cuenta los restantes elementos en contacto con el estudiado. Análogamente tenemos, para la cara inferior:

$$P_{AC}^{M'_{21}} = -P_{BC}^{M'_{21}} = \frac{M'_{21}}{\beta}$$

Tracciones y compresiones debidas a M'_{12} .

Sustituyendo el momento torsor por dos fuerzas y admitiendo la distribución de esfuerzos representada en la figura, en nudo **E** está en equilibrio, no afectando este esfuerzo a las

barras concurrentes en el. Tenemos entonces dos fuerzas verticales aplicadas en **D** y **F**, de valor M'_{12} .



Análogamente a como se hizo al estudiar el esfuerzo Q_1 , consideramos, además de estas fuerzas, otras horizontales, F , que nos equilibren los momentos representados por vectores paralelos al eje Y , entonces se obtiene el valor de F :

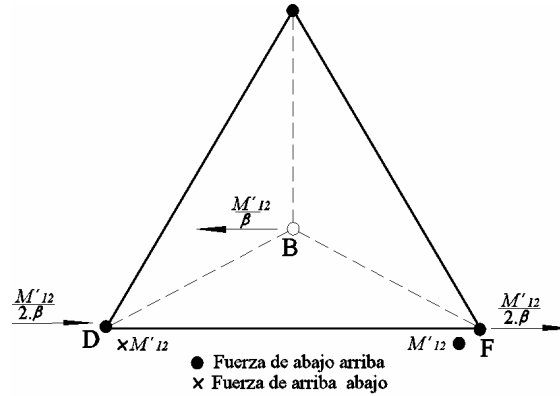
$$F = \frac{1}{\beta} \cdot M'_{12}$$

Admitiendo la distribución de fuerzas F , representada en la figura, tenemos, planteando el equilibrio del nudo B :

$$P_{FB}^{M'_{12}} = \frac{M'_{12}}{2 \cdot \beta} \cdot \frac{1}{l} \cdot \alpha \cdot l$$

De donde:

$$P_{FB}^{M'_{12}} = -P_{DB}^{M'_{12}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot M'_{12}$$



Nota.- Cuando hay bordes apoyados en la dirección OY (solo en los nudos inferiores) desaparece una de las fuerzas aplicadas en E . Según la que se anula queda, en el borde

$$OY : P_{EB}^{M'_{12}} = \pm \frac{\alpha}{\beta} \cdot M'_{12}$$

Fuerzas totales en las barras.

Serán por tanto (recordando: $M'_{12} = M'_{21}$):

$$P_{AB} = \frac{\beta \cdot l \cdot (3 \cdot N'_1 - N'_2) + 2 \cdot (3 \cdot M'_1 - M'_2)}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

$$P_{BC} = \frac{\beta \cdot l \cdot (N'_2 - \sqrt{3} \cdot N'_{12}) + 2 \cdot (M'_2 - \sqrt{3} \cdot M'_{21})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

$$P_{AC} = \frac{\beta \cdot l \cdot (N'_2 + \sqrt{3} \cdot N'_{12}) + 2 \cdot (M'_2 + \sqrt{3} \cdot M'_{21})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

$$P_{BD} = \frac{\alpha \cdot (\sqrt{3} \cdot l \cdot Q'_1 - Q'_2 \cdot l - 2 \cdot M'_{12})}{2 \cdot \beta}$$

$$P_{CD} = P_{BE} = \frac{\alpha \cdot l}{\beta} \cdot Q'_2 \pm (\text{en bordes } OY) \frac{\alpha}{\beta} \cdot M'_{12}$$

$$P_{DE} = \frac{\beta \cdot l \cdot (N'_2 - \sqrt{3} \cdot N'_{12}) - 2 \cdot (M'_2 - \sqrt{3} \cdot M'_{21})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

$$P_{EF} = \frac{\beta \cdot l \cdot (N'_2 + \sqrt{3} \cdot N'_{12}) - 2 \cdot (M'_2 + \sqrt{3} \cdot M'_{21})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

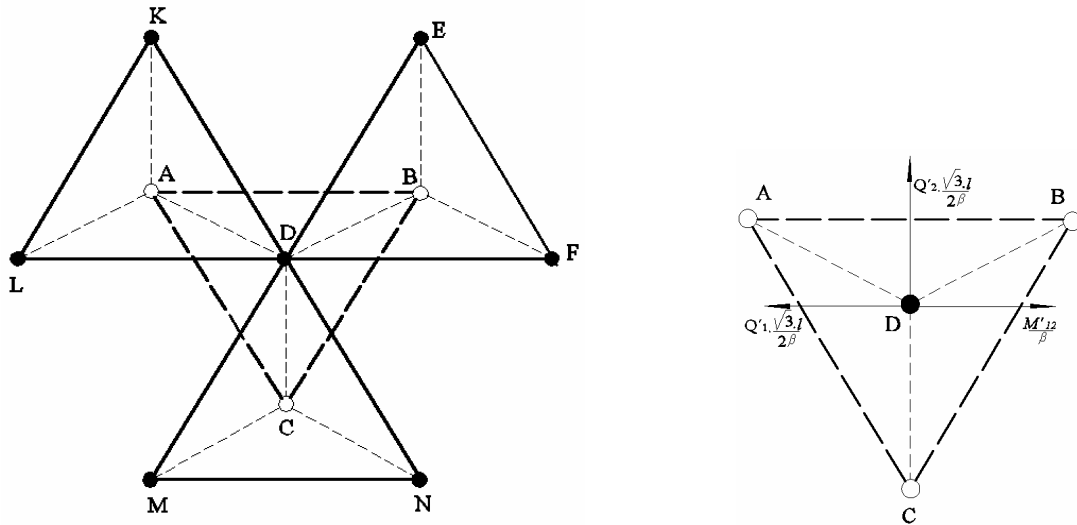
$$P_{DF} = \frac{\beta \cdot l \cdot (3 \cdot N'_1 - N'_2) - 2 \cdot (3 \cdot M'_1 - M'_2)}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta}$$

$$P_{AD} = P_{DF} = -\frac{\alpha \cdot (Q'_2 \cdot l + l \cdot \sqrt{3} \cdot Q'_1 - 2 \cdot M'_{12})}{2 \cdot \beta}$$

Equilibrio de la malla.

Estudiando un nudo general de la malla, en este caso de la cara superior, comprobaremos que existe equilibrio de fuerzas en él. Para ello consideramos el elemento de la malla representado gráficamente a continuación, y planteamos el equilibrio de fuerzas en el nudo D .

Todas la fuerzas exteriores (debidas a las fuerzas de lámina) están en equilibrio excepto las representadas en la figura.



Estas fuerzas vienen equilibradas por las acciones de las barras diagonales AD, BD, CD , únicas barras que absorben los esfuerzos de lámina que producen dichas fuerzas en el nudo D .

El equilibrio se establecido al descomponer estas fuerzas según las barras diagonales en los apartados anteriores.

Estudio del equilibrio de fuerzas en el nudo D debido a los esfuerzos en las barras horizontales concurrentes en el.

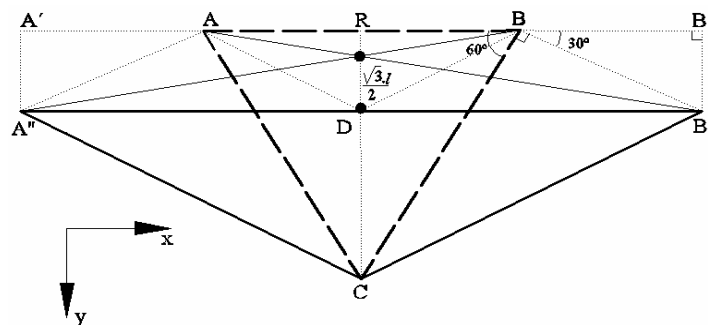
$$\begin{array}{lll}
P_{DF}^{N'_1} + P_{DL}^{N'_1} = 0 ; & P_{DF}^{N'_2} + P_{DL}^{N'_2} = 0 ; & P_{DE}^{N'_2} + P_{DM}^{N'_2} = 0 \\
P_{DK}^{N'_2} + P_{DN}^{N'_2} = 0 ; & P_{DE}^{N'_{12}} + P_{DM}^{N'_{12}} = 0 ; & P_{DK}^{N'_{12}} + P_{DN}^{N'_{12}} = 0 \\
P_{DF}^{M'_1} + P_{DL}^{M'_1} = 0 ; & P_{DF}^{M'_2} + P_{DL}^{M'_2} = 0 ; & P_{DE}^{M'_2} + P_{DM}^{M'_2} = 0 \\
P_{DK}^{M'_2} + P_{DN}^{M'_2} = 0 ; & P_{DE}^{M'_{21}} + P_{DM}^{M'_{12}} = 0 ; & P_{DK}^{M'_{21}} + P_{DN}^{M'_{21}} = 0
\end{array}$$

7.2.4. Deformaciones que los esfuerzos de tracción y compresión en las barras producen en la malla.

N_1 produce esfuerzos en las barras AB y DF de valor:

$$P_{AB}^{N'_1} + P_{DF}^{N'_1} = \frac{l}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot N'_1$$

El triángulo ABC , bajo el esfuerzo N'_1 , se deforma debido al alargamiento de la barra AB , siendo su posición final la correspondiente al triángulo $A''B''C$.


$$\delta = AA' + BB' = \frac{P_{AB}^{N'_1} \cdot l}{A \cdot E}$$

Siendo A el area de la sección recta de la barra y E el módulo de elasticidad del material de la misma.

La deformación será, pues:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{4 \cdot A \cdot E} \cdot N'_1$$

Y por tanto, ya que $P_{AB}^{N'_1}$ es constante a lo largo de AB , es $AA' = BB'$, o sea:

$$BB' = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{8 \cdot A \cdot E} \cdot N'_1$$

YA que las barras AC y BC no sufren deformación debido a N'_1 , la posición final de A y B será A'' y B'' .

Luego:

$$B'B'' = BB' \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BB'}{\sqrt{3}} = \frac{l^2}{8 \cdot A \cdot E} \cdot N'_1$$

La deformación en la dirección Y será:

$$\epsilon_y = -\frac{B'B''}{CR} = -\frac{l^2}{8 \cdot A \cdot E} \cdot N'_1 \cdot \frac{2}{l \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_1$$

(El signo (-) indica acortamiento de la longitud CR).

Según la ley de Hooke, en la lámina de asimilación se tiene:

$$\epsilon_x = -\frac{\sigma'_1}{E'_x} - \nu'_x \cdot \frac{\sigma'_2}{E'_y} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma'_2}{E'_y} - \nu'_y \cdot \frac{\sigma'_1}{E'_x}$$

Siendo $E'_x, E'_y, \nu'_x, \nu'_y$ los módulos de elasticidad y de poisson de la lamina de asimilación en las direcciones X e Y , y σ'_1, σ'_2 las tensiones según las mismas direcciones X e Y de la lamina.

En el caso que nos ocupa, al considerar únicamente N'_1 es $\sigma'_2 = 0$ o sea:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma'_1}{E'_x} \quad ; \quad \epsilon_y = -\nu'_y \cdot \frac{\sigma'_1}{E'_x}$$

Recordando la relación de tensión-esfuerzo:

$$N'_1 = \sigma'_1 \cdot h'; \quad \text{esto es: } \sigma'_1 = \frac{N'_1}{h'}$$

Se tiene finalmente:

$$\epsilon_x = \frac{\sqrt{3} \cdot l'}{4 \cdot A \cdot E} \cdot N'_1 = \frac{N'_1}{h' \cdot E'_x}; \quad \text{de donde: } E_x = \frac{4 \cdot A \cdot E}{\sqrt{3} \cdot l \cdot h}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_1 = -\nu'_y \cdot \frac{N'_1}{h' \cdot E'_x}$$

de donde:

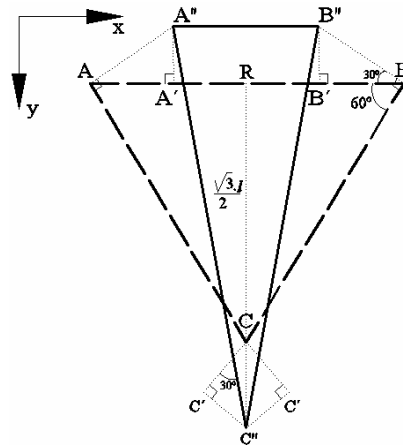
$$\nu'_y = \frac{h' \cdot E'_x \cdot l}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} = \frac{h' \cdot l}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot \frac{4 \cdot A \cdot E}{\sqrt{3} \cdot l \cdot h'} = \frac{1}{3}$$

Deformaciones producidas por N'_2 .

N'_2 produce esfuerzos en las barras AB , DF , AC , BC , DE , EF de valor:

$$P_{AB}^{N'_2} = P_{DF}^{N'_2} = -\frac{l}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$$

$$P_{AC}^{N'_2} = P_{BC}^{N'_2} = P_{DE}^{N'_2} = P_{EF}^{N'_2} = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2$$



En la gráfica están mostradas las deformaciones que estos esfuerzos producen.

El alargamiento δ de la barra AB es:

$$\delta = AA' + BB' = \frac{P_{AB}^{N'_2} \cdot l}{A \cdot E}$$

De donde: $BB' = AA' = \frac{P_{AB}^{N'_2} \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} = \frac{-l^2}{8 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_2$

La deformación será:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{l} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_2$$

El alargamiento de las barras AC y BC será:

$$\delta = CC' = \frac{P_{AC}^{N'_2} \cdot l}{A \cdot E} = \frac{P_{BC}^{N'_2} \cdot l}{A \cdot E} = \frac{l^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_2$$

Y la deformación:

$$\epsilon_y = \frac{CC'' + B'B''}{CR} \quad ; \quad \text{y como:} \quad B'B'' = BB' \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{l^2}{24 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2$$

$$CC'' = \frac{CC'}{\cos 30} = \frac{l^2}{3 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2 \quad ; \quad CR = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}$$

Queda:
$$\epsilon_y = \frac{\frac{l^2}{24 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2 + \frac{l^2}{3 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2}{\frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2$$

Al actuar solo N'_2 es $\sigma'_1 = 0$, y la ley de Hooke en la lámina de asimilación resulta:

$$\epsilon_x = -\nu'_x \frac{\sigma'_2}{E'_y} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma'_2}{E'_y} \quad \text{recordando la relación tensión esfuerzo:} \quad \sigma'_2 = \frac{N'_2}{h'}$$

Se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot A \cdot E} \cdot N'_2 = \frac{N'_2}{h' \cdot E'_y} \quad ; \quad \text{de donde:} \quad E'_y = \frac{4 \cdot A \cdot E}{l \cdot \sqrt{3} \cdot h'}$$

Así mismo se tiene:

$$\epsilon_x = -\nu'_x \cdot \frac{N'_2}{h' \cdot E'_y} = -\frac{l}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_2 \quad ; \quad \text{luego:} \quad \nu'_x = -\frac{h' \cdot l}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot \frac{4 \cdot A \cdot E}{\sqrt{3} \cdot l \cdot h'} = \frac{1}{3}$$

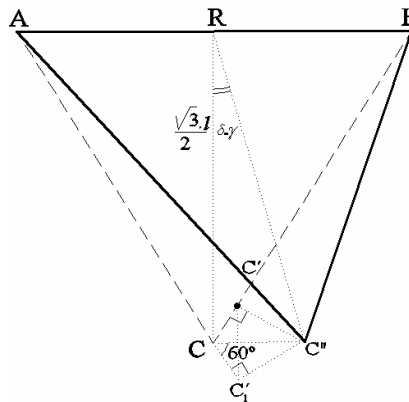
Observamos, pues: $E'_x = E'_y = E'$; $\nu'_x = \nu'_y = \nu'$.

Deformaciones producidas por N'_{12} y N'_{12} .

N'_{12} y N'_{21} producen esfuerzos en las barras BC , AC , DE y EF de valor:

$$P_{BC}^{N'_{12}} = P_{DE}^{N'_{12}} = -\frac{1}{2} N'_{12} \quad ; \quad P_{AC}^{N'_{12}} = P_{EF}^{N'_{12}} = \frac{1}{2} N'_{12}$$

Estudio de las deformaciones que estos esfuerzos producen (figura 7.28)



El alargamiento de la barra AC es:

$$\delta = CC'_1 = \frac{P_{AC}^{N'_{12}} \cdot l}{A \cdot E} = \frac{l^2}{2 \cdot A \cdot E} \cdot N'_{12}$$

El acortamiento de la barra BC es, un valor absoluto, igual al alargamiento de la barra AC (suponemos que las barras tienen la misma sección).

De esta consideración deducimos:

$$CC'' = \frac{CC'_1}{\cos 60^\circ} = \frac{l^2}{A \cdot E} \cdot N'_{12}$$

Según la definición de deslizamiento:

$$\gamma_{xy} = \frac{CC''}{CR} = \frac{l^2}{A \cdot E} \cdot N'_{12} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} \cdot l} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_{12}$$

Según la ley de Hooke para la lámina de sustitución:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau'_{12}}{G'}; \quad \text{y recordando } \tau'_{12} = \frac{N'_{12}}{h'}; \quad \text{tenemos: } \gamma_{xy} = \frac{N'_{12}}{h' \cdot G'} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{3} \cdot A \cdot E} \cdot N'_{12}$$

$$\text{De donde: } G' = \frac{\sqrt{3} \cdot A \cdot E}{2 \cdot l \cdot h'}; \quad \text{luego se verifica: } G' = \frac{E'}{2(1+\nu')}$$

Deformaciones debidas a M'_1 .

Vamos a estudiar las deformaciones en la cara inferior de la malla. M'_1 produce e la barra AB un esfuerzo:

$$P_{AB}^{M'_1} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \beta} \cdot M'_1$$

La deformación en la cara inferior, según X , es:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{l} = \frac{P_{AB}^{M'_1} \cdot l}{A \cdot E \cdot l} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \beta \cdot A \cdot E} \cdot M'_1$$

La deformación, en la dirección Y , es:

$$\epsilon_y = -\nu' \epsilon_x = -\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2 \cdot \beta \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \text{ (pues } \sigma'_2 = 0 \text{)}$$

Las expresiones que nos indican las deformaciones de la malla, en función de la distancia a la fibra neutra, son:

$$\epsilon_x = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \beta \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \cdot \frac{2 \cdot z}{\beta \cdot l} = \frac{\sqrt{3} \cdot z}{\beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \cdot M'_1$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \beta \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \cdot \frac{2 \cdot z}{\beta \cdot l} = - \frac{z}{\sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \cdot M'_1$$

Consideremos que estas funciones deben ser las mismas para la lámina de sustitución. Tenemos, pues:

$$M'_1 = \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} \sigma'_1 \cdot z \cdot dz = \frac{E'}{1 - \nu'^2} \cdot \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} (\epsilon_x + \nu' \cdot \epsilon_y) \cdot z \cdot dz$$

Luego:

$$M'_1 = \frac{E'}{1 - \nu'^2} \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \right) \cdot M'_1 \cdot z^2 \cdot dz$$

Por consiguiente:

$$1 = \frac{E'}{1 - \frac{1}{9}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \right) \cdot \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} z^2 \cdot dz = \frac{9 \cdot E'}{8} \cdot \frac{8}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \cdot \frac{\frac{h'^3}{8} + \frac{h'^3}{8}}{3}$$

De donde:

$$1 = \frac{9 \cdot E'}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E} \cdot \frac{h'^3}{12}$$

Sustituyendo el valor hallado de E' tenemos:

$$1 = \frac{9 \cdot 4 \cdot A \cdot E}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta^2 \cdot l \cdot A \cdot E \cdot \sqrt{3} \cdot l \cdot h'} \cdot \frac{h'^3}{12} = \frac{h'^2}{3 \cdot \beta^2 \cdot l^2}$$

Y despejando h' : $h' = \sqrt{3} \cdot \beta \cdot l$

Características elásticas de la lámina de sustitución.

Para que la malla sea isótropa se debe comprobar que el valor de G , hallado apartir de N'_{12} , coincide con el hallado apartir de los momentos torsores M'_{12} . Wright calcula G'' a partir del torsor y obtiene:

$$G'' = \frac{A \cdot E}{3 \cdot l^2 (1 + \alpha^2)} \neq G'$$

Por consiguiente, existe una anisotropía respecto a las deformaciones por torsión, lo cual no invalida el método ya que, normalmente, estas deformaciones son poco importantes.

Tenemos pues finalmente, que debe calcularse la superficie definida por la malla como homogénea, isotrópica y continua con las siguientes características

$$h' = \sqrt{3} \cdot \beta \cdot l \quad ; \quad E' = \frac{4 \cdot A \cdot E}{3 \cdot \beta \cdot l^2} \quad ; \quad \nu' = \frac{1}{3} \quad ; \quad G' = \frac{A \cdot E}{2 \cdot \beta \cdot l^2}$$

Siendo:

l : longitud de las barras de las caras.

A : sección de las barras.

E : módulo de elasticidad del material de la malla.

h : canto de la malla.

$$\beta = \frac{h}{l}$$

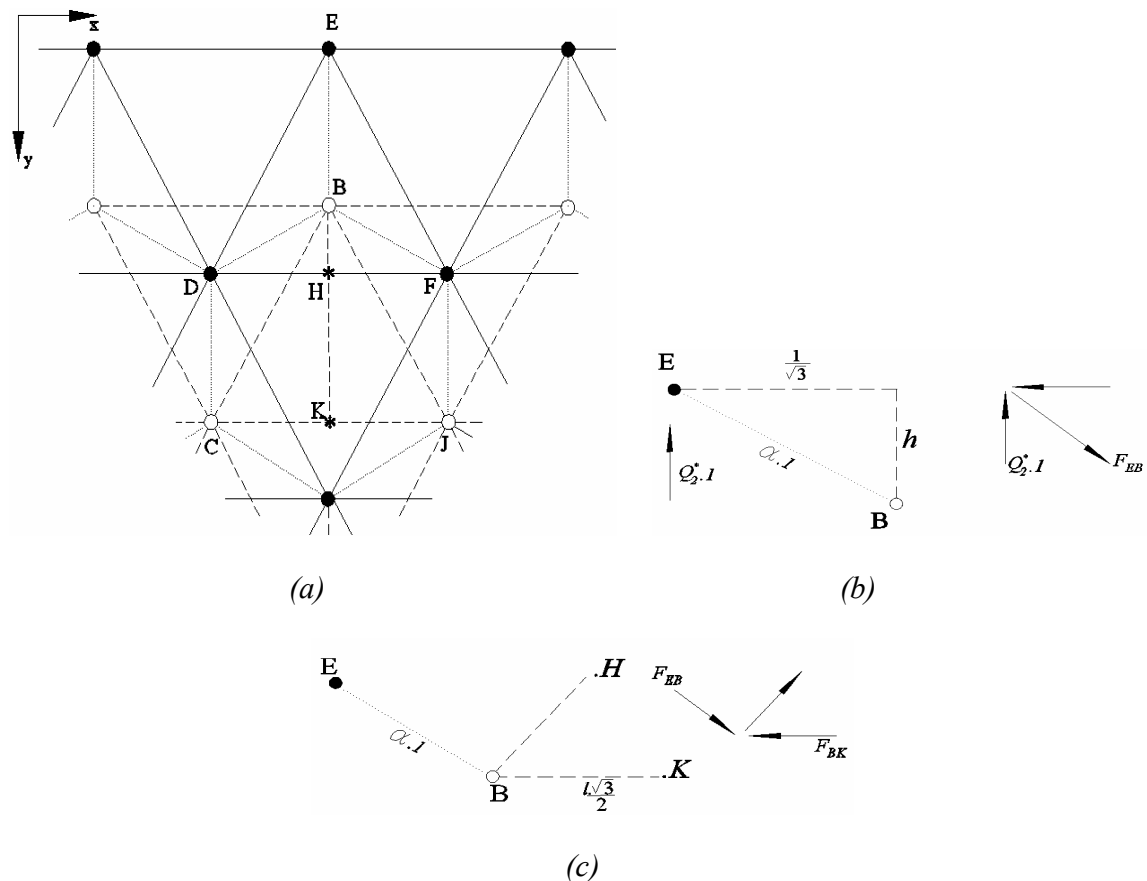
Una vez hallados los esfuerzos de lámina se calcularán, con las formulas obtenidas en 2, las tracciones y compresiones en las barras que definen la malla espacial, comprobándose su validez.

7.2.5. Factores de corrección en las barras de las capas superior e inferior en el caso de cubiertas planas rectangulares con carga uniforme.

Suponemos que el lado mayor de la malla es paralelo al eje x , configuración lógica puesto que, de esta forma, las tres barras que definen el modulo triangular de las caras absorben los esfuerzos debidos al momento flector máximo. Si el lado menor fuese paralelo al eje x los esfuerzos debidos al momento flector máximo serían absorbidos solamente, por las barras paralelas al eje x de las caras, forma de trabajo más desfavorable.

Los factores de corrección modifican, los esfuerzos de las barras AC , CB , DE , EF . Aunque el factor de corrección es distinto para las barras DE y EF de la cara superior y para las CA y CB de la cara inferior, consideremos el más desfavorable, que será el que corresponda a las barras de la capa no apoyada.

El factor de corrección se halla descomponiendo el esfuerzo cortante Q'_2 en el apoyo, entre las barras concurrentes en dicho apoyo. Así si la malla esta apoyada por su cara superior en los nudos tipo E de la reacción vertical $Q'_2 \cdot l$ deberá descomponerse entre las barras ED , EF y EB mostrados a continuacion:



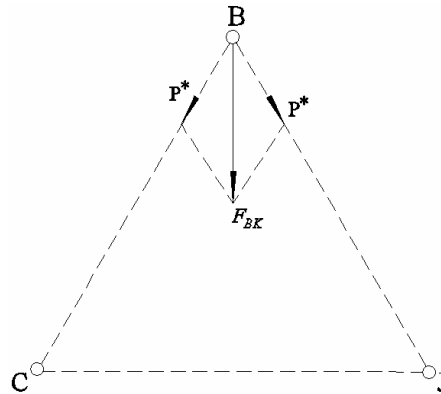
Descomposición de nudos debido a reacción vertical

A continuación, F_{EB} debe descomponerse entre BD , BF , BC y BJ figura c:

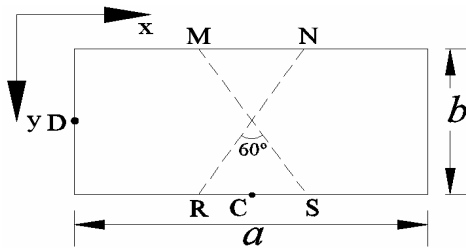
$$F_{BK} = F_{EB} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{\alpha \cdot l} = F_{EB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \alpha}$$

Y por tanto la figura d:

$$P^* = F_{BK} = F_{EB} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = F_{EB} \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} = Q_2^* \cdot \frac{l^2}{2 \cdot h}$$



P^* es el coeficiente corrector a aplicar a las barras DE , EF , AC y CB del centro de la malla. El valor de Q_2^* es:



Siendo Q_2^C el esfuerzo cortante en el punto C , por lo que Q_2^* es, aproximadamente, el esfuerzo cortante en los puntos M , N , R ó S (figura 7.29.e).

7.2.6. Esfuerzos finales en las barras de una placa plana rectangular sometida a carga uniforme.

$$-P_{DF} = P_{AB} = \frac{2 \cdot (3 \cdot M'_1 - M'_2)}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} + \frac{Q_1^D \cdot l \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \beta} \quad (1)$$

$$P_{AC} = P_{BC} = \frac{2 \cdot (M'_2 \pm \sqrt{3} \cdot M'_{12})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} + (\text{en el centro}) \frac{Q_2^* \cdot l^2}{2 \cdot h}$$

$$P_{DE} = P_{FE} = -\frac{2 \cdot (M'_2 \pm \sqrt{3} \cdot M'_{12})}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} - (\text{en el centro}) \frac{Q_2^* \cdot l^2}{2 \cdot h}$$

$$P_{BD} = \frac{\alpha \cdot (\sqrt{3} \cdot l \cdot Q'_1 - Q'_2 \cdot l - 2 \cdot M'_{12})}{2 \cdot \beta}$$

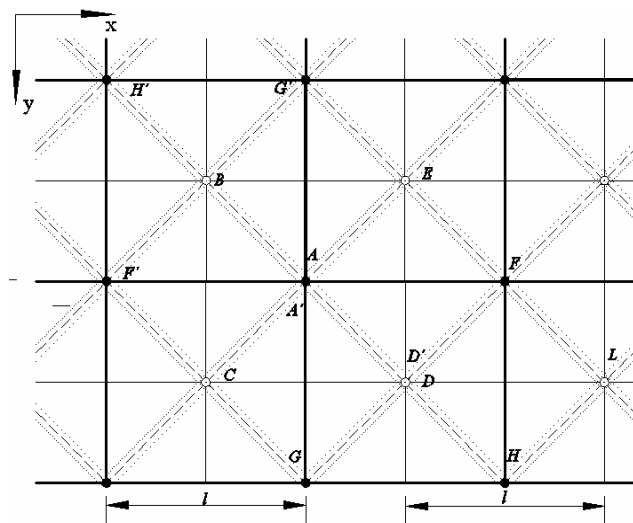
$$P_{BE} = \frac{\alpha \cdot l}{\beta} \cdot Q'_2 \pm (\text{en bordes } OY) \frac{\alpha}{\beta} \cdot M'_{12}$$

(1) El esfuerzo cortante Q'_1 en el borde se descompone según una componente inclinada que absorben las diagonales y una componente horizontal F , que absorben las tres direcciones de las barras de capa, de las que la barra tipo AB o DF en la dirección x acumula los $\frac{2}{3} F$.

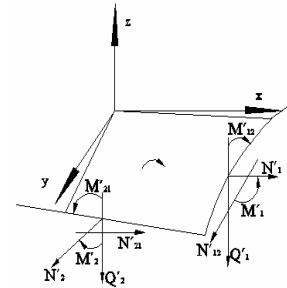
Siendo $F = \frac{Ql^2 \sqrt{3}}{4h}$, la corrección de P_{AB} y P_{DF} será: $\frac{2}{3} F = \frac{Ql^2 \sqrt{3}}{6h} = \frac{Ql \sqrt{3}}{6\beta}$

$$P_{BF} = -\frac{\alpha \cdot (Q'_2 \cdot l + \sqrt{3} \cdot l \cdot Q'_1 - 2 \cdot M'_{12})}{2 \cdot \beta}$$

7.2.7. Mallas formadas por pirámides de base cuadrada y triangulada.

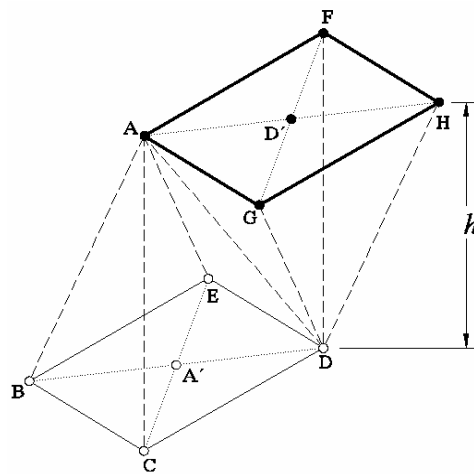


- nudo de la cara superior
- nudo de la cara inferior
- barra de la cara superior
- barra diagonal desde un nudo superior a uno inferior
- barra de la cara inferior
- barra diagonal contenida en la cara inferior
- barra diagonal contenida en la cara superior



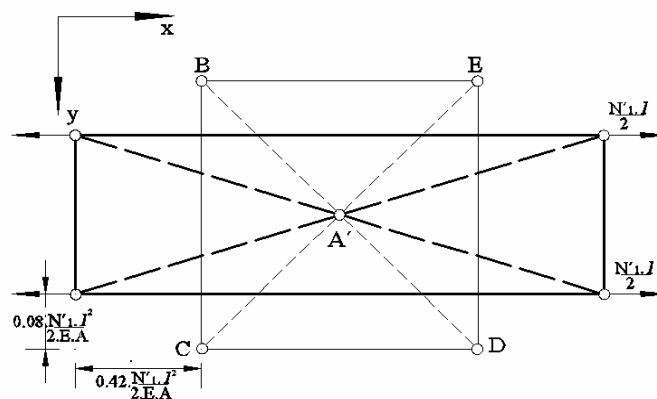
Llamando l al lado de los cuadrados que forman las caras superior o inferior de la malla y h al canto de la misma, y considerando que todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad E , determinaremos en primer lugar, que relación deberá existir entre las áreas de las secciones rectas de las barras, que definen los cuadrados de las caras, y las correspondientes a las barras que los triangulan.

Consideremos como elemento de malla el representado en el esquema.



Esfuerzos y deformaciones debidos a N'_1, N'_2, N'_{12} .

El esfuerzo $N'_1 \cdot l$, actuando en el elemento considerado de malla (que contiene un cuadrado de base), se distribuirá la mitad en cada una de las caras, actuando en cada nudo la fuerza correspondiente al esfuerzo aparecido en los medios elementos separados por la barra concurrente a dicho nudo.



Nótese que por simetría, el punto A' no sufrirá ningún desplazamiento. (A' y, por consiguiente, D' pueden ser, nudos o no según conveniencia del proyectista).

Llamando A al área de la sección recta de las barras BE , CD , BC y ED y Ad al área de las barras diagonales de las caras, se ha resuelto por el cálculo matricial la estructura representada en la anterior figura, hallándose para el nudo C , las siguientes deformaciones (para carga unitaria y considerando $E = 1$, $l = 1$, $A = 1$):

$$\Delta_x^c = -\frac{2,8 \cdot A + Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l^2}{2 \cdot A \cdot E}; \quad \Delta_y^c = -\frac{Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l^2}{2 \cdot A \cdot E}$$

Los esfuerzos en las barras son:

$$P_{CD}^{N'_1} = P_{BE}^{N'_1} = +\frac{2,8 \cdot A + Ad}{2,8 \cdot A + 2 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2}$$

$$P_{DE}^{N'_1} = P_{BC}^{N'_1} = -\frac{Ad}{2,8 \cdot A + 2 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2}$$

$$P_{CE}^{N'_1} = P_{BD}^{N'_1} = \frac{1,4 \cdot Ad}{2,8 \cdot A + 2 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2}$$

La deformación unitaria en el sentido X será pues:

$$\epsilon_x = \frac{2 \cdot |\Delta_x^c|}{l} = \frac{2,8 \cdot A + Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{A \cdot E}$$

Y en el sentido de Y :

$$\epsilon_y = -\frac{2 \cdot |\Delta_y^c|}{l} = -\frac{Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{A \cdot E}$$

Según la teoría de estructuras laminares:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma'_1}{E'_x} - \nu'_x \frac{\sigma'_2}{E'_y}; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma'_2}{E'_y} - \nu'_y \frac{\sigma'_1}{E'_x}$$

Y, si sólo actúa N'_1 :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma'_1}{E'_x} = \frac{N'_1}{h' \cdot E'_x}; \quad \epsilon_y = -\nu'_y \frac{\sigma'_1}{E'_x} = -\nu'_y \frac{N'_1}{h' \cdot E'_x}$$

E imponiendo la igualdad y deformación entre la malla y la lámina de asimilación:

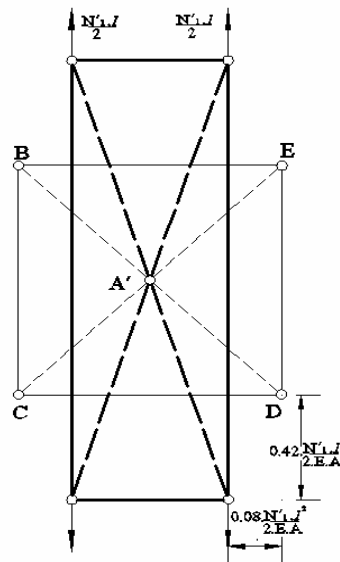
$$\epsilon_x = \frac{2,8 \cdot A + Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{A \cdot E} = \frac{N'_1}{h' \cdot E'_x}$$

De donde:
$$E'_x = \frac{A \cdot E \cdot (5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad)}{h' \cdot l \cdot (2,8 \cdot A + Ad)}$$

Y haciendo lo mismo para ϵ_y :

$$\epsilon_y = -\nu_y \frac{N'_1}{h'_x} \cdot \frac{h' \cdot l \cdot (2,8 \cdot A + Ad)}{A \cdot E \cdot (5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad)} = -\frac{Ad}{5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad} \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{A \cdot E}; \quad \nu_y = \frac{Ad}{2,8 \cdot A + Ad}$$

En el caso de actuar, por simetría, obtendremos los mismos resultados y por consiguiente:



$$E'_x = E'_y = E' ; \quad \nu'_x = \nu'_y = \nu'$$

En lo cual queda claro la ortotropía de la lámina de asimilación con respecto a E' y ν' .

En cuanto a los esfuerzos y deformaciones provocadas por el cortante N'_{12} , aceptando la

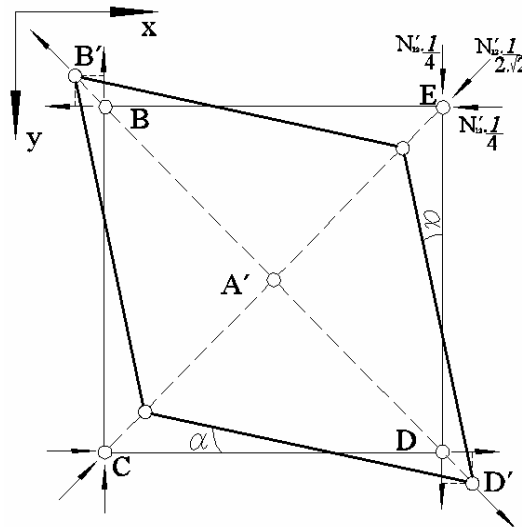
distribución en la grafica a continuación, donde el valor de estas cortantes es $N'_{12} \cdot \frac{1}{4}$ que,

debidamente compuestos, se reducen a fuerzas de valor $N'_{12} \cdot \frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}}$ actuando según las

diagonales, la simetría particular de esta sollicitación indica que las barras BE , BC , CD y DE no están sometidas a fuerzas axiales, ya que la deformación propia se traduce en un giro y un desplazamiento de cada una de estas barras.

Tenemos entonces:

$$P_{DB}^{N'_{12}} = -P_{CE}^{N'_{12}} = N'_{12} \cdot \frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}}$$



Y según la ley de Hooke:

$$BB'' + DD'' = \frac{N'_{12} \cdot l}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{2}}{Ad \cdot E} = \frac{N'_{12} \cdot l^2}{2 \cdot Ad \cdot E}$$

Por simetría: $DD'' = \frac{N'_{12} \cdot l^2}{4 \cdot Ad \cdot E}$; y por tanto: $D'D'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{N'_{12} \cdot l^2}{4 \cdot Ad \cdot E} = \frac{N'_{12} \cdot l^2}{5,6 \cdot Ad \cdot E}$

De donde: $\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{N'_{12} \cdot l^2}{5,6 \cdot Ad \cdot E} \cdot \frac{1}{l/2} = \frac{N'_{12} \cdot l}{2,8 \cdot Ad \cdot E}$

Según la definición de deslizamiento:

$$\gamma = 2\alpha = \frac{N'_{12} \cdot l}{1,4 \cdot Ad \cdot E}$$

Por otra parte, según la teoría general de láminas:

$$\gamma = \frac{\tau'_{12}}{G'} = \frac{N'_{12}}{h' \cdot G'}$$

E imponiendo el mismo deslizamiento en la malla y en la lámina:

$$\gamma = \frac{N'_{12}}{h' \cdot G'} = \frac{N'_{12} \cdot l}{1,4 \cdot Ad \cdot E}; \quad \text{de donde:} \quad G' = \frac{1,4 \cdot Ad \cdot E}{l \cdot h'}$$

Por fin, como la isotropía de la lámina exige que se cumpla:

$$G' = \frac{E'}{2 \cdot (1 + \nu')}$$

Sustituyendo lo valores de G' , E' y ν' hallados:

$$\frac{1,4 \cdot Ad \cdot E}{l \cdot h'} = \frac{A \cdot E \cdot (5,6 \cdot A + 4 \cdot Ad)}{h' \cdot l \cdot (2,8 \cdot A + Ad)} \cdot \frac{1}{2 + \frac{2Ad}{2,8 \cdot A + Ad}}$$

De donde:

$$1,4 \cdot Ad = A \quad ; \quad \frac{Ad}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

Es decir que la isotropía de la lámina de asimilación es cierta cuando el área de la sección de las diagonales de las caras es 0,7 veces el área de la sección de las barras ortogonales de las mismas.

$$\begin{aligned} P_{CD}^{N'_1} &= P_{DE}^{N'_1} = -0,84 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{BC}^{N'_1} &= P_{DE}^{N'_1} = -0,16 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{BD}^{N'_1} &= P_{CE}^{N'_1} = 0,234 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{CD}^{N'_2} &= P_{BE}^{N'_2} = -0,16 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{BC}^{N'_2} &= P_{DE}^{N'_2} = 0,84 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{DB}^{N'_2} &= P_{CE}^{N'_2} = 0,234 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{BD}^{N'_{12}} &= -P_{EC}^{N'_{12}} = N'_{12} \cdot \frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \end{aligned} \quad \text{Análogamente:} \quad \left\{ \begin{aligned} P_{AF}^{N'_1} &= P_{GH}^{N'_1} = -0,84 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{AG}^{N'_1} &= P_{FH}^{N'_1} = -0,16 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{AB}^{N'_1} &= P_{GF}^{N'_1} = 0,234 \cdot \frac{N'_1 \cdot l}{2} \\ P_{AF}^{N'_2} &= P_{GH}^{N'_2} = -0,16 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{AG}^{N'_2} &= P_{FH}^{N'_2} = 0,84 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{AH}^{N'_2} &= P_{GF}^{N'_2} = 0,234 \cdot \frac{N'_2 \cdot l}{2} \\ P_{AH}^{N'_{12}} &= -P_{EG}^{N'_{12}} = N'_{12} \cdot \frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

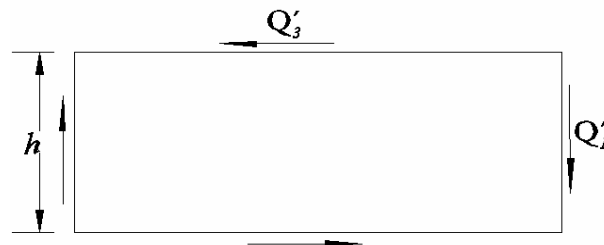
Además: $E'_x = E'_y = E' = \frac{A \cdot E}{0,425 \cdot l \cdot h^2}$; $\nu'_x = \nu'_y = \nu' = 0,2$; $G' = \frac{A \cdot E}{l \cdot h'}$

Tracciones y compresiones debidas a Q'_1 .

La aparición de un cortante Q'_1 presupone la existencia del Q'_3 para que se mantenga el equilibrio del elemento al prescindir de los incrementos de momentos flectores y torsores.

Valor de Q'_3 :

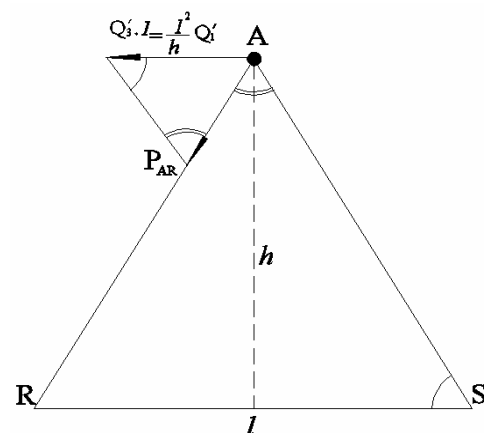
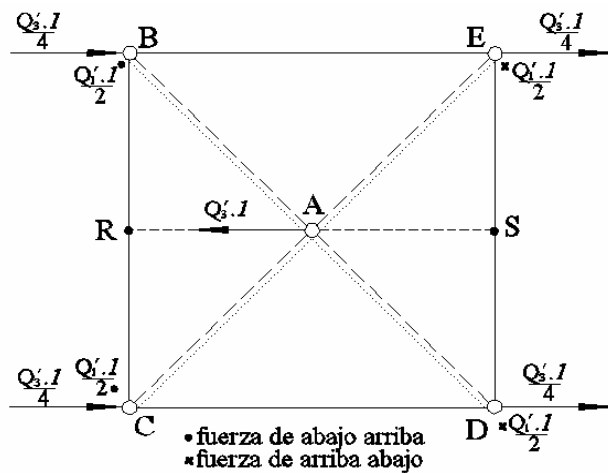
$$Q'_3 \cdot h = Q'_1 \cdot l \quad ; \quad Q'_3 = \frac{l}{h} \cdot Q'_1$$



Aplicando Q'_3 y Q'_1 tal como se indica en la siguiente figura se producirán los esfuerzos de tracción y compresión en las barras diagonales AB , AC , AD y AE .

Descomposición de $Q'_3 \cdot l$ en las direcciones AR y AS (segunda figura):

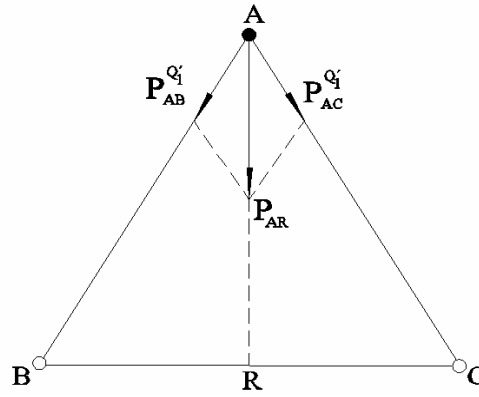
$$AR = AS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot h^2 + l^2}$$



$$\frac{l^2}{h} \cdot Q'_1 = \frac{P_{AR}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot h^2 + l^2}}; \quad \text{de donde: } P_{AR} = \frac{l}{2 \cdot h} \cdot \sqrt{4 \cdot h^2 + l^2} \cdot Q'_1$$

Descomposición de P_{AR} y P_{AS} en las direcciones $AB - AC$ y $AD - AE$ respectivamente:

$$\frac{|P_{AB}^{Q'_1}|}{AB} = \frac{1}{2} \frac{P_{AR}}{AR} \quad ; \quad AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}$$



Posteriormente:

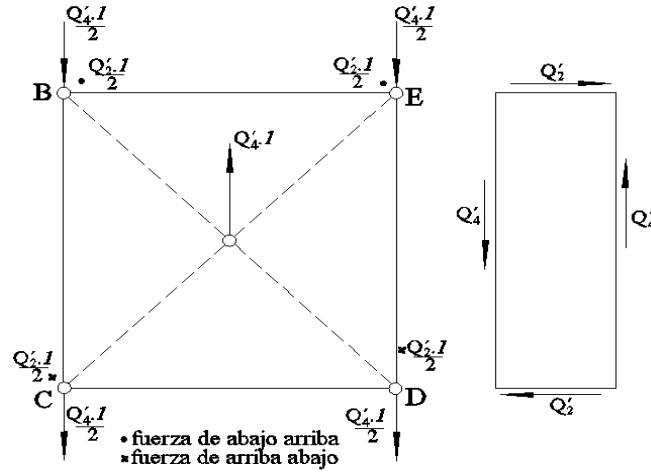
$$|P_{AB}^{Q'_1}| = \frac{P_{AR} \cdot AB}{2 \cdot AR} = \frac{l}{2 \cdot h} \cdot \sqrt{4 \cdot h^2 + l^2} \cdot Q'_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot h^2 + l^2}} = \frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot Q'_1$$

Ósea:

$$P_{AB}^{Q'_1} = P_{AC}^{Q'_1} = -P_{AE}^{Q'_1} = -P_{AD}^{Q'_1} = \frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot Q'_1$$

Tracciones y compresiones debidas a Q'_2 .

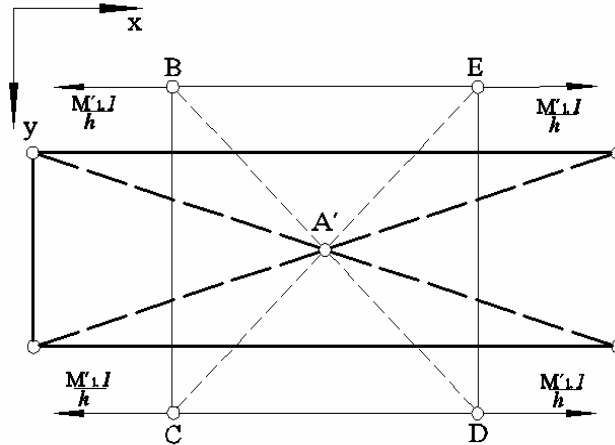
De la misma forma que en el caso de Q'_1 se tiene:



$$P_{AD}^{Q'_2} = P_{AC}^{Q'_2} = -P_{AB}^{Q'_2} = -P_{AE}^{Q'_2} = \frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot Q'_2$$

Tracciones, compresiones y deformaciones debidas a M'_1 .

Sustituyendo M'_1 por un par $\left(\frac{M'_1}{h}\right) \cdot l$ cuyas fuerzas actúan en las caras superior e inferior y están aplicadas tal y como indica gráficamente a continuación, y procediendo del mismo modo que al estudiar las compresiones y tracciones debidas a N'_1 obtenemos:



$$P_{EB}^{M'_1} = P_{CD}^{M'_1} = 0,84 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}; \quad P_{ED}^{M'_1} = P_{BC}^{M'_1} = -0,16 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}; \quad P_{CE}^{M'_1} = P_{BD}^{M'_1} = 0,234 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}$$

E igualmente:

$$P_{AB}^{M'_1} = P_{GH}^{M'_1} = -0,84 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}; \quad P_{AG}^{M'_1} = P_{FH}^{M'_1} = 0,16 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}; \quad P_{FG}^{M'_1} = P_{AH}^{M'_1} = -0,234 \cdot \frac{M'_1 \cdot l}{h}$$

Las deformaciones en la cara inferior son:

$$\epsilon_x = \frac{2 \cdot 0,42 \cdot l \cdot M'_1 \cdot l}{A \cdot E \cdot h \cdot l} = \frac{0,84 \cdot l}{h \cdot A \cdot E} \cdot M'_1; \quad \epsilon_y = -\frac{0,17 \cdot l}{h \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \text{ (ya que } \sigma'_2 = 0 \text{)}$$

Las funciones de deformación son, por tanto:

$$\epsilon_x = \frac{0,84 \cdot l}{h \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \cdot \frac{2 \cdot z}{h} = \frac{1,68 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \cdot z \cdot M'_1$$

$$\epsilon_y = -\frac{0,17 \cdot l}{h \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \cdot \frac{2 \cdot z}{h} = -\frac{0,34 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \cdot M'_1 \cdot z$$

Según la teoría general de cálculo laminar:

$$M'_1 = \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} \sigma'_1 \cdot z \cdot dz = \frac{E'}{1-\nu'^2} \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} (\epsilon_x + \nu' \epsilon_y) \cdot z \cdot dz$$

Por tanto:

$$M'_1 = \frac{E'}{1-\nu'^2} \cdot \left(\frac{1,68 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} - \frac{0,2 \cdot 0,34 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \right) \cdot M'_1 \int_{-\frac{h'}{2}}^{\frac{h'}{2}} z^2 \cdot dz$$

De donde:

$$1 = \frac{E'}{0,96} \cdot \frac{1,612 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \cdot \frac{\frac{h'^3}{8} + \frac{h'^3}{8}}{3} = \frac{E'}{0,96} \cdot \frac{1,612 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \cdot \frac{h'^3}{12}$$

Sustituyendo E' por su valor en función de las características de la malla obtenemos:

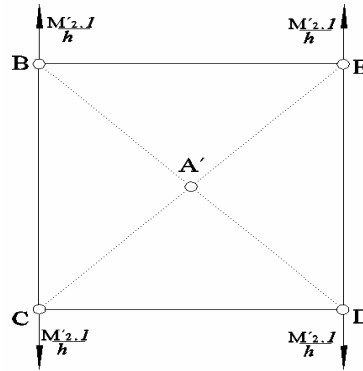
$$1 = \frac{A \cdot E}{0,425 \cdot l \cdot h'} \cdot \frac{1}{0,96} \cdot \frac{1,612 \cdot l}{h^2 \cdot A \cdot E} \cdot \frac{h'^3}{12}; \quad 1 = \frac{1,612 \cdot h'^2}{4,86 \cdot h^2}$$

Y por consiguiente:

$$h'^2 = \frac{4,86}{1,612} \cdot h^2 = 3 \cdot h^2; \quad \text{luego: } h' = \sqrt{3} \cdot h$$

Tracciones y compresiones debidas a M'_2 .

Como en el caso de M'_1 se tiene:



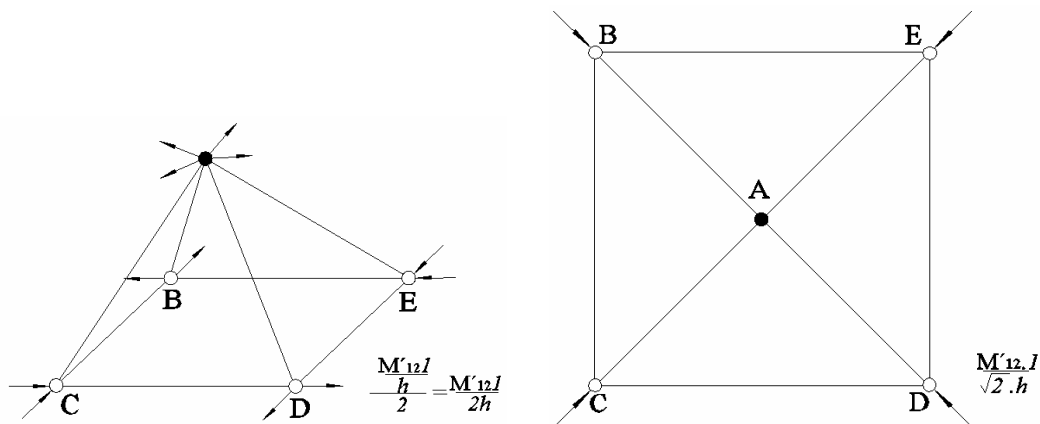
$$P_{BC}^{M'_2} = P_{ED}^{M'_2} = 0,84 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}; \quad P_{BE}^{M'_2} = P_{CD}^{M'_2} = -0,16 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}; \quad P_{CE}^{M'_2} = P_{BD}^{M'_2} = 0,234 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}$$

E igualmente:

$$P_{AG}^{M'_2} = P_{FH}^{M'_2} = -0,84 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}; \quad P_{AF}^{M'_2} = P_{GH}^{M'_2} = 0,16 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}; \quad P_{GF}^{M'_2} = P_{AH}^{M'_2} = -0,234 \cdot \frac{M'_2 \cdot l}{h}$$

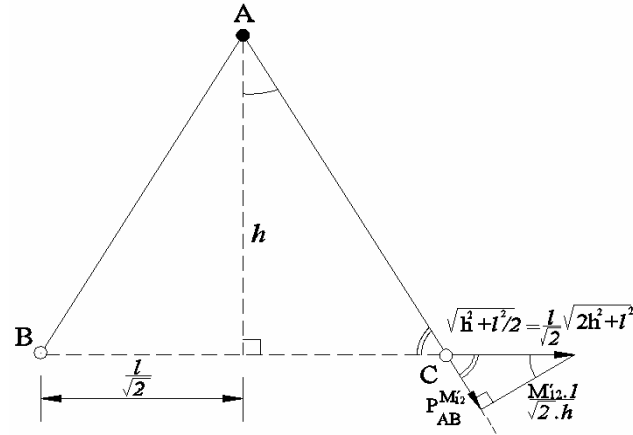
Tracciones y compresiones debidas a M'_{12} y M'_{21} .

Aceptando $M'_{12} = M'_{21}$, sustituyendo M'_{12} por un par $\left(\frac{M'_{12}}{h}\right) \cdot l$, y aplicando estas fuerzas tal como muestra la figura de la izquierda, obtenemos un estado de cargas como el de la figura de la parte derecha.



Las fuerzas en las barras son, entonces:

$$P_{AB}^{M'_{12}} = P_{AD}^{M'_{12}} = -P_{AC}^{M'_{12}} = -P_{AE}^{M'_{12}} = \frac{M'_{12} \cdot l}{\sqrt{2} \cdot h} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} = \frac{l^2 \cdot M'_{12}}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}}$$



Esfuerzos finales en las barras.

$$P_{AB} = -\frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot (Q'_1 + Q'_2) + \frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \cdot M'_{12}$$

$$P_{AC} = -\frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot (Q'_1 - Q'_2) - \frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \cdot M'_{12}$$

$$P_{AE} = \frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot (Q'_1 - Q'_2) - \frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \cdot M'_{12}$$

$$P_{AD} = \frac{l \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h} \cdot (Q'_1 + Q'_2) + \frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \cdot M'_{12}$$

$$P_{BE} = P_{CD} = 0,84 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} + \frac{M'_1}{h} \right) - 0,16 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_2}{2} + \frac{M'_2}{h} \right)$$

$$P_{BC} = P_{DE} = 0,84 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_2}{2} + \frac{M'_2}{h} \right) - 0,16 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} + \frac{M'_1}{h} \right)$$

$$P_{AF} = P_{GH} = 0,84 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} - \frac{M'_1}{h} \right) - 0,16 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_2}{2} - \frac{M'_2}{h} \right)$$

$$P_{AG} = P_{FH} = 0,84 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_2}{2} - \frac{M'_2}{h} \right) - 0,16 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} - \frac{M'_1}{h} \right)$$

$$P_{BD} = P_{CE} = 0,234 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} + \frac{N'_2}{2} + \frac{M'_1}{h} + \frac{M'_2}{h} \right)$$

$$P_{AH} = P_{GF} = 0,234 \cdot l \cdot \left(\frac{N'_1}{2} + \frac{N'_2}{2} - \frac{M'_1}{h} - \frac{M'_2}{h} \right)$$

El cálculo de la malla comporta, en primer lugar, el cálculo de los esfuerzos $N'_1, N'_2 \dots M'_{12}$ de la lámina de igual forma y de características:

$$E' = \frac{A \cdot E}{0,425 \cdot l \cdot h'}; \quad \nu' = 0,2; \quad G' = \frac{A \cdot E}{l \cdot h'}; \quad h' = \sqrt{3} \cdot h$$

Obtenidos estos esfuerzos, su sustitución en las expresiones halladas en este apartado proporciona los esfuerzos de tracción o compresión en las barras. Las barras diagonales en las caras (BD, CE, AH y GF) deben tener una sección $0,7 \cdot A$, si A es la sección de las barras ortogonales ($BE, CD, BC, DE, AF, GH, AG, FH$). En cuanto a las diagonales AB, AC, AD, AE su sección puede ser cualquiera.

NOTA 1.- Los nudos A' y D' , como se a dicho, pueden existir como tales o no, pero en ningún caso podrán estar dichos nudos sometidos a cargas exteriores.

NOTA 2.- Cuando la lámina de asimilación tenga esfuerzos N'_1 y N'_2 importantes (todos los casos en general, excepto placas planas) la condición de borde debe ser empotramiento, es decir, impedidos los desplazamientos en los nudos de ambas caras situados en dichos bordes.

7.2.8. Mallas formadas por pirámides de base cuadrada, placas planas.

La lámina de asimilación debe ser siempre una placa plana. Si la carga es perpendicular a la superficie es: $N'_1 = N'_2 = N'_{12} = 0$. Puede prescindir entonces de las diagonales de las caras (BD, CE, AH, GF), que determinaban la malla estudiada en 7.4. En este caso, rehaciendo el proceso, las características de la placa ficticia son:

$$E' = \frac{A \cdot E}{0,5 \cdot l \cdot h'}; \quad \nu' = 0,3^{(*)}; \quad h = 2 \cdot h \text{ (siempre } N'_{12} = N'_1 = N'_2 = 0 \text{)}$$

Y los esfuerzos finales en las barras:

$$P_{AB} = -\frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} (Q'_1 + Q'_2) \right] + M'_{12} \left(\frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \right)$$

$$P_{AD} = \frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} (Q'_1 + Q'_2) \right] + M'_{12} \left(\frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \right)$$

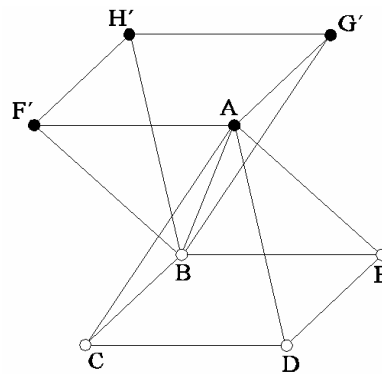
$$P_{AC} = -\frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} (Q'_1 - Q'_2) \right] - M'_{12} \left(\frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \right)$$

$$P_{AE} = \frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} (Q'_1 - Q'_2) \right] - M'_{12} \left(\frac{l^2}{\sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{2 \cdot h^2 + l^2}} \right)$$

$$P_{BE} = P_{CD} = -P_{AF} = -P_{GH} = \frac{M'_1 \cdot l}{h}$$

$$P_{BC} = P_{DE} = -P_{AG} = -P_{FH} = \frac{M'_2 \cdot l}{h}$$

Consideremos el elemento de la malla considerado en la grafica a continuación (la nomenclatura estudiada en 7.2.7).

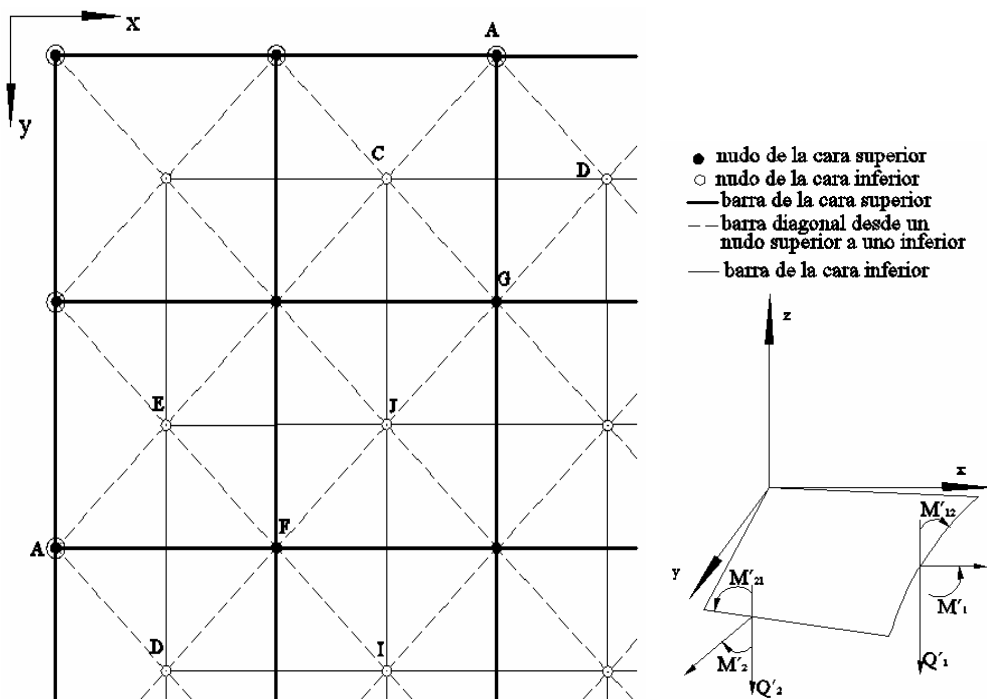


Debido a que los esfuerzos normales N'_1 y N'_2 son nulos en una placa plana (considerando, como es corriente, nulos los corrimientos u y v en el plano de la placa) los enlaces de la

mallas pueden realizarse a través de nudos pertenecientes solamente a una cara, enlaces que pueden ser articulaciones o carros deslizantes según interese o no que aparezcan reacciones horizontales en el contorno. Obsérvese que la diferencia no es acusada por la placa de asimilación queda los mismos esfuerzos en ambos casos. Se establecen entonces unos coeficientes correctores, no solo debidos al tipo de enlace, sino a la desaparición de unas ciertas barras en el contorno.

Nudos de borde pertenecientes a la cara superior.

Consideremos el caso de apoyo deslizante en todo el contorno. Si los nudos de borde son lo de la cara suprior, los esfuerzos que aparecen en los bordes de la placa de asimilación son Q'_1, Q'_2 y M'_{12} , que hemos supuesto son absorbidas por las barras diagonales. Al desaparecer las barras AC y AB en los bordes paralelos al eje Y y las barras AB y AE en los bordes paralelos al eje X , para que exista equilibrio en los nudos A de borde, las barras AF y AG deben absorber unos esfuerzos suplementarios de valor: $-\frac{Q'_1 \cdot l^2}{2 \cdot h}$, $-\frac{Q'_2 \cdot l^2}{2 \cdot h}$ respectivamente.



Asimismo, las barras DI y CJ deberán absorber unos esfuerzos suplementarios iguales a:

$$\frac{Q'_1 \cdot l^2}{2 \cdot h}, \frac{Q'_2 \cdot l^2}{2 \cdot h} \text{ respectivamente.}$$

Estos esfuerzos de corrección tienden a igualarse a medida que nos alejamos del borde, por lo que en todas las barras de las caras, tomaremos el valor $\frac{Q' \cdot l^2}{2 \cdot h}$ como el más desfavorable.

Los esfuerzos finales en las barras de las caras son:

$$P_{GH} = P_{AF} = -\frac{M'_2 \cdot l}{h} - \frac{Q_1^* \cdot l^2}{h}$$

$$P_{CD} = P_{BE} = \frac{M'_2 \cdot l}{h} + \frac{Q_1^* \cdot l^2}{h}$$

Siendo Q_1^* el esfuerzo cortante Q'_1 en el punto de borde correspondiente a la prolongación de la barra estudiada. Asimismo:

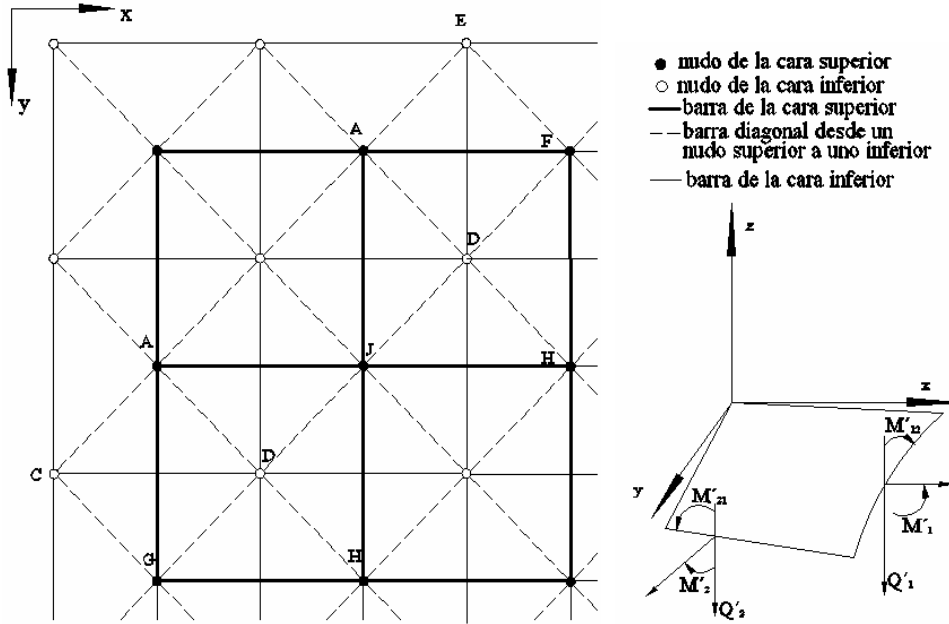
$$P_{AG} = P_{FH} = -\frac{M'_2 \cdot l}{h} - \frac{Q_2^* \cdot l^2}{h}$$

$$P_{BC} = P_{DE} = \frac{M'_2 \cdot l}{h} + \frac{Q_2^* \cdot l^2}{h}$$

Siendo, también Q_2^* el esfuerzo cortante Q'_2 en el punto de borde correspondiente a la prolongación de la barra estudiada.

Nudos de borde pertenecientes a la cara inferior.

También se considera en el apoyo deslizante en todo el contorno. Cuando los nudos de borde son los de la cara inferior los coeficientes correctores serán: $\frac{Q'_1 \cdot l^2}{2 \cdot h}$,



$$\frac{Q'_2 \cdot l^2}{2 \cdot h}, \text{ para las barras } CD \text{ y } ED$$

$$-\frac{Q'_1 \cdot l^2}{h}, -\frac{Q'_2 \cdot l^2}{h}, \text{ para las barras } GH \text{ y } FH.$$

Por tanto los esfuerzos finales son, teniendo en cuenta lo dicho en el apartado anterior, el las barras que definen las bases de las pirámides:

$$P_{GH} = P_{AF} = -\frac{M'_1 \cdot l}{h} - \frac{Q'_1 \cdot l^2}{h}; \quad P_{BE} = P_{CD} = \frac{M'_1 \cdot l}{h} + \frac{Q'_1 \cdot l^2}{h}$$

Asimismo:

$$P_{AG} = P_{FH} = -\frac{M'_2 \cdot l}{h} - \frac{Q'_2 \cdot l^2}{h}; \quad P_{BC} = P_{DE} = \frac{M'_2 \cdot l}{h} + \frac{Q'_2 \cdot l^2}{h}$$

Siendo Q'_1 y Q'_2 los esfuerzos definidos con anterioridad en párrafos anteriores.

NOTA.- Obsérvese que estos factores de corrección obligan a considerar la carga simétrica respecto al centro de la malla, para que los valores de los cortantes Q'_1 y Q'_2 sean iguales en los extremos de una línea de barras paralelas a uno de los bordes. Asimismo se considera esta solución válida solo para placas rectangulares.

Borde articulado.

Si el contorno es articulado, esto es, que los nudos de borde pueden absorber fuerzas horizontales, el mayor hiperestatismo de la estructura reduce en unos esfuerzos menores en las barras, por lo que la corrección anterior sigue siendo válida con un mayor margen de seguridad (en este caso el mismo coeficiente corrector puede tomarse como reacción horizontal en los nudos de borde, aunque entonces tendríamos, teóricamente, el nudo desequilibrado).

Esfuerzos finales en las barras de la malla.

Los esfuerzos finales serán:

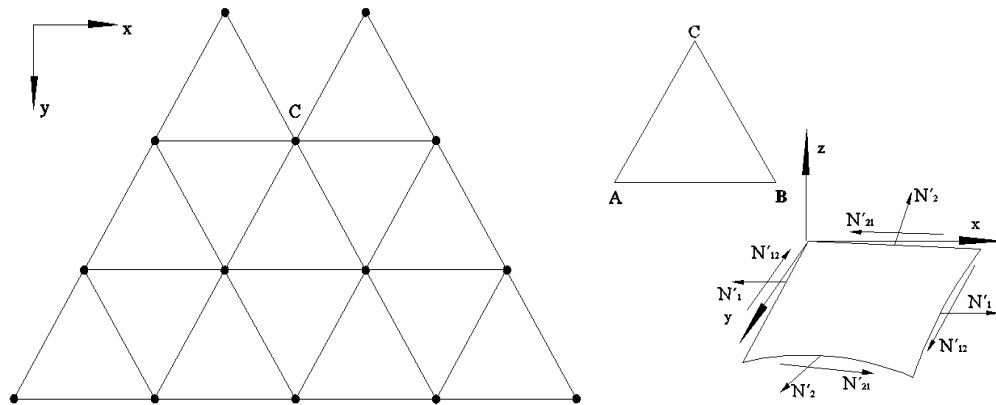
$$\begin{aligned}
 P_{AB} &= -\frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \cdot \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot (Q'_1 + Q'_2) \right] + \frac{l^2}{2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}} \cdot M'_{12} \\
 P_{AD} &= \frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \cdot \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot (Q'_1 + Q'_2) \right] + \frac{l^2}{2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}} \cdot M'_{12} \\
 P_{AC} &= -\frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \cdot \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot (Q'_1 - Q'_2) \right] - \frac{l^2}{2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}} \cdot M'_{12} \\
 P_{AE} &= \frac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}}{h} \cdot \left[\frac{l}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot (Q'_1 - Q'_2) \right] - \frac{l^2}{2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + 2 \cdot h^2}} \cdot M'_{12} \\
 P_{AF} = P_{GH} &= -\frac{M'_1 \cdot l}{h} - \frac{Q'_1 \cdot l^2}{h}; & P_{AG} = P_{FH} &= -\frac{M'_2 \cdot l}{h} - \frac{Q'_2 \cdot l^2}{h} \\
 P_{BE} = P_{CD} &= \frac{M'_1 \cdot l}{h} + \frac{Q'_1 \cdot l^2}{h}; & P_{BC} = P_{DE} &= \frac{M'_2 \cdot l}{h} + \frac{Q'_2 \cdot l^2}{h}
 \end{aligned}$$

7.2.9. Mallas de una sola capa con triángulos equiláteros.

Por admitir, en todo el desarrollo, que las barras que definen una malla están sometidas únicamente, a esfuerzos axiales (compresiones y tracciones constantes a lo largo de las secciones rectas), estas mallas de una sola capa tienen aplicación en aquellos elementos estructurales asimilables a superficies continuas, láminas, en las que las solicitaciones producen fundamental esfuerzos de membrana, pudiéndose prescindir de los de lámina (momentos y cortantes perpendiculares a la superficie media).

Esto no ocurre prácticamente nunca. Por otra parte, el menor número de nudos y barras de estas mallas las hace fácilmente procesables por ordenador mediante cálculo exacto (un gran tamaño, además, exigirá ya dos capas). Por ello las expresiones obtenidas a continuación deben tomarse con carácter de predimensionado. (para un mejor estudio puede verse “Cubiertas Laminas cilíndricas formadas por una malla triangular de perfiles metálicos”, Florencio del pozo, núm. 176, monografía IETCC).

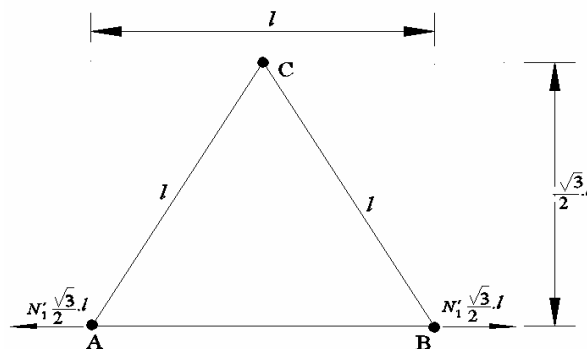
Consideramos dichas mallas sometidas a los esfuerzos de membrena N'_1, N'_2, N'_{12} y N'_{21} (recordando que el equilibrio de momentos representados por vectores perpendiculares a la superficie media no indica: $N'_{12} = N'_{21}$).



Tracciones y compresiones debidas a N'_1 .

Considerando que las fuerzas, debidas al esfuerzo de membrana N'_1 , actúan como se

representa en la figura, tenemos: $P_{AB}^{N'_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot N'_1$



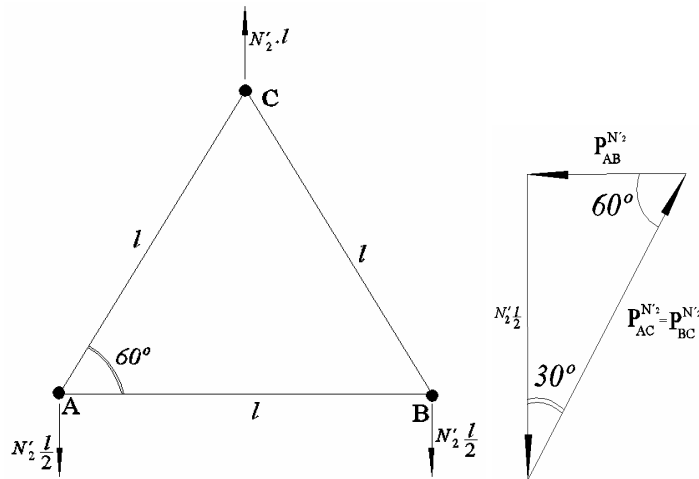
Tracciones y compresiones debidas a N'_2 .

Admitiendo la distribución de fuerzas, se tiene:

$$P_{AB}^{N'_2} = -N'_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot l \cdot N'_2$$

$$P_{AC}^{N'_2} = P_{BC}^{N'_2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ} \cdot N'_2 = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot N'_2$$

Obsérvese que los nudos están en equilibrio.



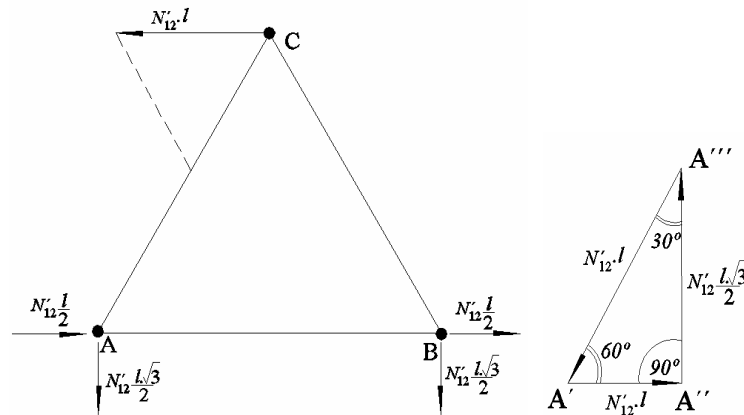
Tracciones y compresiones debidas a N'_{12} y N'_{21} .

Admitiendo la distribución de fuerzas indicada graficamente, y planteando el equilibrio del nudo C obtenemos:

$$-P_{AC}^{N'_{12}} = P_{Cb}^{N'_{12}} = l \cdot N'_{12}$$

Estudiando las relaciones geométricas del triangulo $A'A''A'''$ se tiene:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{N'_{12} \cdot \frac{l}{2}}{N'_{12} \cdot l}; \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{N'_{12} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}}{N'_{12} \cdot l}$$



Lo que nos indica que los nudos A y B (por antimetría) están en equilibrio, luego:

$$P_{AB}^{N'_{12}} = 0$$

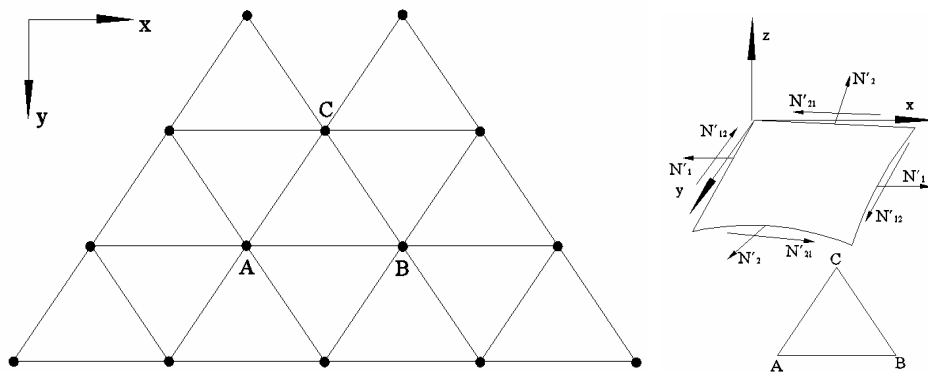
Esfuerzos finales en las barras.

$$P_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot N'_1 - \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot N'_2 = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot (3 \cdot N'_1 - N'_2)$$

$$P_{AC} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot N'_2 - N'_{12} \cdot l = l \cdot \left(\frac{N'_2}{\sqrt{3}} - N'_{12} \right)$$

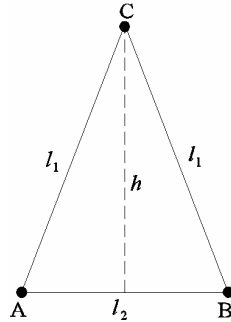
$$P_{BC} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot N'_2 + N'_{12} \cdot l = l \cdot \left(\frac{N'_2}{\sqrt{3}} + N'_{12} \right)$$

7.2.10. Mallas de una sola capa con triángulos isósceles.



Variante de la malla desarrollada en 7.2.9, y de aplicación más importante en las superficies que definen un paraboloides hiperbólico. Al igual que en el caso anterior, la lámina de

asimilación ha de ser tal que puedan despreciarse los esfuerzos de lámina y considerar, solamente, los de membrana.

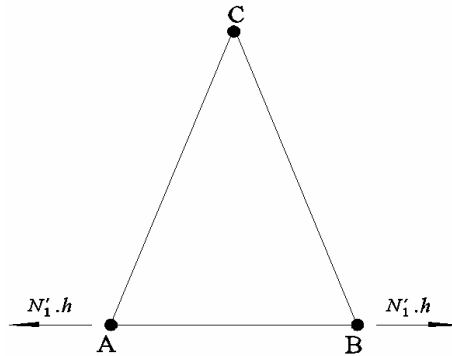


Llamando l_1 a la longitud de los dos lados iguales del triángulo isósceles y l_2 a la de la base, el valor de la altura es:

$$h = \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}$$

Tracciones Y Compresiones Debidas A N'_1 .

Admitiendo la distribución de fuerzas tenemos:



$$P_{AB}^{N'_1} = N'_1 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2} \cdot N'_1$$

Tracciones Y Compresiones Debidas A N'_2 .

Las fuerzas, debidas al esfuerzo de menbrena N'_2 , actúan sobre el elemento considerado de malla tal como se puede ver en el esquema. Del equilibrio del nudo C deducimos:

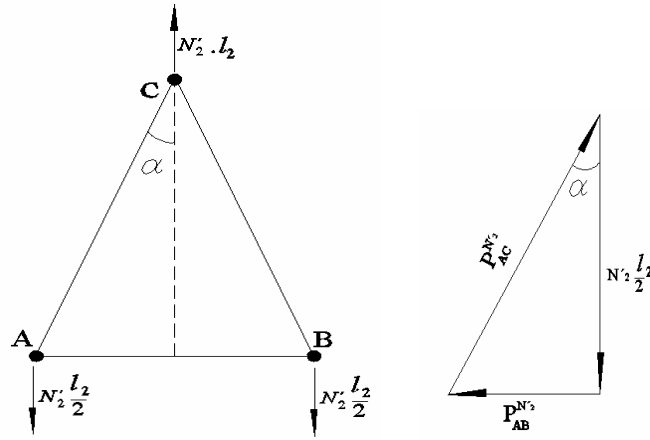


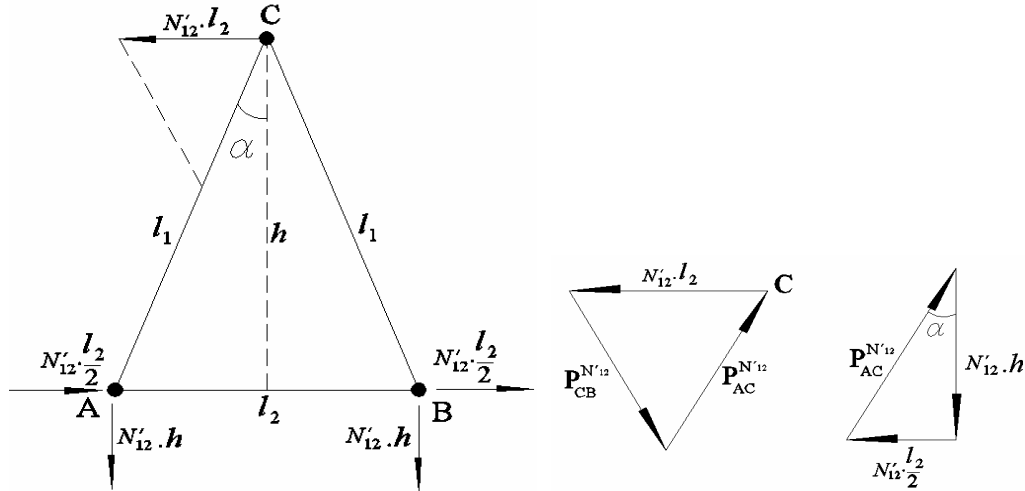
Figura 7.55.

$$P_{AC}^{N'_2} = P_{BC}^{N'_2} = N'_2 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{h} = \frac{l_1 \cdot l_2}{\sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}} \cdot N'_2$$

$$P_{AB}^{N'_2} = -P_{AC}^{N'_2} \cdot \frac{l_2}{2 \cdot l_1} = -\frac{l_2^2}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}} \cdot N'_2$$

Tracciones Y Compresiones Debidas A N'_{12} Y N'_{21} ($N'_{12} = N'_{21}$).

Admitiendo la distribución de fuerzas, y equilibrando el nudo C tenemos:



El nudo A , bajo la acción de las fuerzas $P_{AC}^{N'_{12}}$, $N'_{12} \cdot h$, $N'_{12} \cdot \frac{l_2}{2}$ está en equilibrio, luego:

$$P_{AB}^{N'_{12}} = 0$$

Esfuerzos Lineales En Las Barras.

$$P_{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2} \cdot N'_1 - \frac{l_2^2}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}} \cdot N'_2$$

$$P_{AC} = \frac{l_1 \cdot l_2}{\sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}} \cdot N'_2 - l_1 \cdot N'_{12}$$

$$P_{BC} = \frac{l_1 \cdot l_2}{\sqrt{4 \cdot l_1^2 - l_2^2}} \cdot N'_2 + l_1 \cdot N'_{12}$$

7.3. CONSIDERACIONES GENERALES EN MALLAS.

7.3.1. Pandeo.

Una vez realizado el cálculo de la malla deberá tenerse en cuenta el efecto de pandeo en las barras comprimidas. La carga crítica de Euler correspondiente a la barra doblemente

articulada es:
$$P_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$$

Siendo E, J y l el módulo de elasticidad, momento de inercia y longitud de la barra considerada. Existiendo, además, el efecto del pandeo general de la estructura, que sobre todo en mallas de una sola capa, puede ser determinante.

7.3.2. Enlaces.

Si se unen en la base de sustentación los nudos de una sola cara de malla, la lámina de sustitución se considerará articulada. Si se enlazan los nudos de dos caras, la lámina se considerará empotrada. En todos los casos, excepto en las mallas que definen placas planas, se enlazarán los nudos de ambas caras con lo que la lámina de sustitución se calculará empotrada en el apoyo. Estas consideraciones hacen referencia al cálculo por asimilación a superficies continuas (láminas). La limitación de tener que unir con los apoyos, forzosamente, los nudos de ambas caras no es propia de la malla si no del método de cálculo. No obstante esta limitación es poco importante ya que este tipo de unión es el

recomendable en general, excepto en mallas que definen placas planas, excepción que el método también recoge estudiando este tipo de mallas en lazadas a través de los nudos de una de sus caras. Si se realiza un cálculo elástico exacto (cálculo matricial, por ejemplo) las condiciones de borde pueden ser cualesquiera.

7.3.3. Reacciones.

La reacción, en un nudo de borde, será la resultante de los esfuerzos de las barras concurrentes en él.

7.3.4. Campo de aplicación del cálculo por asimilación a estructuras continuas.

Este proceso de cálculo es más exacto cuanto mayor es el número de módulos que define la malla; precisamente en aquellos casos en que el excesivo número de barras y nudos impide un cálculo matricial exacto. Por tanto, cubre el campo inaccesible a la actual capacidad y rapidez de ejecución de los ordenadores.

7.3.5. Deformaciones.

La deformación de una malla, en general, será la de la lámina ficticia de asimilación ω_f . En el caso de las mallas en forma de placa plana rectangular, los coeficientes de corrección incorporados influyen también sobre la flecha en el punto central que pasa a tener los siguientes valores:

- a) Malla tetraédrica: $\omega = \omega_f \frac{M_2 + \frac{Q_2^* \cdot l^2}{2}}{M_2}$
- b) Malla en pirámide cuadrada: $\omega = \omega_f \frac{Q_K^* \cdot l^2 + M_K}{M_K}$

$$(K = 1 \text{ ó } 2 \text{ según sea } M_1 < M_2 \text{ ó } M_2 > M_1).$$

Pero la asimilación de la malla a una superficie continua presenta problema de cara a las deformaciones en ciertos casos.

Si consideramos, por ejemplo, una malla plana en pirámide cuadrada, su comportamiento es distinto según si las condiciones de borde consisten en una serie de articulaciones o de nudos deslizantes. Esta diferencia de comportamiento no la refleja la placa de material continuo y los esfuerzos obtenidos en las barras con el método aquí expuesto pueden asimilarse al caso de la malla considerándola deslizante (en el caso de articulaciones los esfuerzos serán menores en general debido al mayor grado de hiperestatismo). En cuanto a las deformaciones, llamando ω a la flecha máxima en el centro de mallas planas rectangulares con carga uniforme en pirámide cuadrada (La deformación dada por el método), se obtienen, a partir de ella, las flechas máximas en caso de borde deslizante, ω_d , o de borde articulado, ω_a , de la siguiente forma:

$$\omega_d = \omega \cdot \left(\frac{3,8 - \gamma}{1,28} \right); \quad \omega_a = \omega \cdot \left(\frac{5,3 - \gamma}{3,3} \right); \quad 1 < \gamma < 2$$

Siendo: $\gamma = \frac{\text{lado mayor de la placa}}{\text{lado menor de la placa}}$

En el caso de cubiertas planas en malla tetraédrica la deformación máxima en el centro es expresada, por el método indicado, con suficiente aproximación.

Otro capítulo importante lo constituyen las deformaciones u de la malla deslizante en el sentido de las perpendiculares a los lados contenidos en el plano de la placa. La u_{\max} , e el centro del lado mayor (dirigida hacia dentro de la placa) es aproximadamente:

$$u_{\max} = \omega_d \left(\frac{\gamma - 0,33}{6,66} \right)$$

Esta deformación es básica para el cálculo de los soportes de la malla que deberán resistir en sus cabezas una deformación máxima de valor u_{\max} , si el apoyo deslizante quiere obtenerse con ayuda de unos soportes muy flexibles.

ANEXO A

GUÍA DE PROYECTO EDIFICIOS ALTOS

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo de la materia tiene por objeto de simular el comportamiento de un edificio que bordea los veinte niveles, ante efectos de carga y sea su peso propio, cargas vivas y más que todo la acción dinámica derivada del viento y del sismo.

En este sentido resulta importante la rigidez de la estructura posea características que brinden lo que se llama confort Humano, para ello la concepción esquemática de sus elementos estructurales, mas que todo las columnas, deben presentar una disposición que precautele las zonas de mas elevada, específicamente apartir de los 20 pisos, resulta indisponible la utilización de los denominados cajones de ascensor que son muros estructurales que absorben la gran demanda de corte producto del viento y sismos eventuales, además como tiene una mayor rigidez con relación a los demas elementos estructurales tiene por objeto el atraer a los esfuerzos.

En conformidad de estos propósitos nuestra edificación contempla estos criterios para salvaguardar en fin la integridad de sus habitantes

CARACTERÍSTICAS DE LA EDIFICACIÓN.

Para el desempeño del proyecto se adoptara toda la información del plano arquitectónico que se tenga a disposición, ya sea desde su localización. Por ende esta primera parte del proyecto contempla los siguientes puntos:

- Localización de la edificación.

- Datos asumidos.
- Norma empleada.
- Nombre del Software empleado.

Características de la edificación.

Localización del proyecto: Se debe especificar el lugar donde se localizara el edificio.

Datos asumidos: Al respecto se debe aclarar que todo el grupo de datos requeridos son adaptados ya sea en base a los planos de edificación por estudiar o directamente se asumen los mismos.

Norma empleada: Especificar siempre la norma que se empleara.

Nombre del Software empleado: El programa de simulación estructural empleado para las solicitudes y acciones en los elementos estructurales es la versión 9..o..10 No lineal del SAP-2000.

ALCANCE DEL PROYECTO.

El proyecto posee un grupo de requerimientos que avalan con más garantía la representatividad de la geometría de un edificio, para ello se distinguen las siguientes características.

Simulación Estructural:

La concepción del modelo estructural sistema de Pórtico o sistema Dual de forma tridimensional. Para ello se asocia tanto las vigas como las columnas como elementos unidimensionales, denominados **frames** en tanto los puntos de los puntos de intersección de los mismos como nodos **joints**. En el segundo sistema aparte de lo anterior se utilizan muros estructurales o pórticos con diagonales.

El análisis de las losas se puede realizar de dos formas: Repartiendo las cargas a las vigas, colocando elementos **sells** a las vigas y luego discretizandolos.

Utilización de trechos rígidos:

Este fenómeno que influye a las columnas de amplias dimensiones (columna pared) con las vigas conectadas a ellas, se ha representado suponiendo una columna-pared idealizado con eje vertical y el referidas a las vigas adicionadas de una longitud igual al semi-ancho del soporte o columna de rigidez infinita, a estas partes indeformables se les denomina trechos rígidos. Este hecho parte de la pauta que los esfuerzos de diseño deberían ser considerados a partir de la cara de la columna y no así como los resultados de los simuladores que nos presentan que es de nodo a nodo. Para ello el Sap-2000 posee la opción **EndOffset** que establece a partir de un porcentaje de la mitad del ancho de la columna los resultados que nos proporciona.

Diagrama Rígido de Piso:

En la idealización tridimensional es usual considerar las losas con rigidez infinita para la deformación en su propio plano, como también despreciar la rigidez de flexión en losas. Se dice entonces que el comportamiento se asimila a diafragmas. Para ello la idealización con lleva la discretización en elementos finitos. La implementación de estos conceptos en el simulador estructural con lleva la selección de los nodos de la losa y atribuirles una restricción tipo **Diafragma**.

Confort Humano:

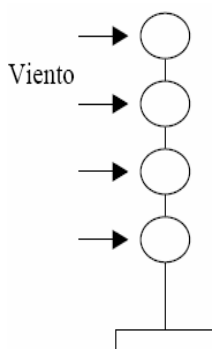
Existen estudios que han demostrado que el hombre tiene una reacción desfavorable en su bien estar ante el oscilamiento de su entorno, estos efectos pueden conducir desde un simple mareo a enfermedades fóbicas. Para ello la estabilidad de la edificación es primordial en el afán de proporcionar confort humano, se han establecido criterios que puedan ayudar a establecer el grado de conformidad que presenta una edificación. Pagina 51, Tabla 2.1. Criterios Para Adoptar el tipo de Edificio.

Consideración Dinámica del Viento:

La altura del edificio es el principal factor para escoger los criterios de análisis estructural y dimensionamiento mas adecuados. En este sentido si el coeficiente de esbeltez es mayor a 5 entonces es imprescindible el análisis del viento dinámicamente, limitando las deformaciones en función del **periodo propio**, pagina 44, Tabla 2.1. Criterios Para

Adoptar el tipo de Edificio. Esta consideración dinámica del viento se resuelve con el software Sap-2000 bajo el influjo de la opción **Time History Function** donde se refleja la variación del impacto del aire en forma de fuerzas en los nudos a través del tiempo. Para ello se hace indispensable la creación de un estado de carga que sirva de multiplicador de las fuerzas que se definieron en el **Time History Function**. Cave acotar que los periodos de suceso del evento (ráfaga de viento) no deberán coincidir con el periodo propio de la estructura, esto llevaría al colapso de la estructura para alcanzar resonancia.

Masa Traslacional y Momento de Inercia Rotacional: Es imprescindible para el análisis dinámico de las estructuras la concepción idealizada de un edificio como un péndulo donde el grupo de pisos esta representado por elementos de masa que se disponen a una altura uniforme como se indica en la figura. Para ello resulta imprescindible evaluar la masa traslacional y el momento de inercia rotacional, que mas o menos sintetizarían en vectores tipo fuerza la masa inercial de las columnas, losas y todo aquello presente entre la mitad de un piso y otro en los puntos o **nudos maestros**.



Consideración Dinámica del Sismo:

Para las cargas de naturaleza sísmica es necesario recurrir a un análisis de tipo dinámico, el análisis modal espectral (o método de la respuesta espectral), es un método ventajoso para estimar los desplazamientos y fuerzas en los elementos de un sistema estructural. El método implica el cálculo solamente de los valores máximos de los desplazamientos – y las aceleraciones – en cada modo usando un espectro de diseño, el mismo que representa el promedio a la envolvente de espectros de respuestas para diversos sismos, con algunas consideraciones adicionales expuesto en los códigos de diseño. Luego se combinan estos

valores máximos, por ejemplo mediante un promedio ponderado entre la media y la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales valores máximos; otro método es el de la combinación cuadrática completa (método CQC) que considera además de una correlación entre los valores modales máximos. De este modo, se obtiene los valores más probables de desplazamientos y fuerzas. Esta consideración de dinámica del sismo se resuelve con el software Sap-2000 bajo el influjo de la opción **Response Spectrum** donde se refleja el espectro de respuesta del sismo que actuara sobre la estructura.

DETERMINACIÓN DE CARGAS

Antecedentes: Esta etapa del proyecto esta destinada a definir las distintas acciones y sus magnitudes de las mismas que por cierto recaerá en los distintos elementos estructurales. Como es proceder deberemos generar un modelo estructural de la edificación que simulara los elementos estructurales llámense vigas, columnas, soportes, fundaciones, etc. Estos elementos serán sustituidos por barras o nodos que por su carácter unidimensional solo soportaran cargas lineales o puntuales. Por tal causa las cargas que en la realidad se comporten de diferente manera a esta (lineal o puntual), deberemos equipararlas con cargas de ese tipo tratando de que los efectos sean casi similares.

Análisis de Cargas: las acciones son asumidas como fuerzas concentradas y distribuidas o deformaciones indispuestas o impedidas que son aplicadas sobre la estructura De acuerdo a la forma de aplicación, se tienen acciones directas e indirectas, las primeras se dividen en permanentes, variables y extraordinarias y las indirectas en reológicas, térmicas, movimientos impuestos o acciones sísmicas.

En el presente estudio solo consideraremos las acciones directas permanentes (Carga muerta) y variables (Carga viva).

Acciones permanentes o cargas muertas (CM). Este tipo de cargas se denominan como permanentes por el hecho de que actúan en toda circunstancia ya que constituyen la misma estructura, estas pueden ser:

Peso propio de los elementos estructurales: Peso de columnas, vigas, losas.

Peso propio de unidades constructivas: Techo, Muros.

Peso de instalaciones fijas, etc.

Acciones variables o cargas vivas (CV)

Se diferencian de las anteriores porque su accionar es aleatorio en el tiempo. De igual forma pueden constituirse de forma concentrada o distribuida. Entre las más importantes, se tienen las siguientes Acciones:

Acciones variables : Peso de las personas, muebles, instalaciones amovibles, productos almacenables, vehículos, etc.

Acciones climáticas, varían con la acción del viento, lluvia, nieve, etc.

Acciones del terreno, se deben a su peso y fuerzas de empuje del terreno, sismo.

Acciones variables debidas al proceso de construcción.

SIMULACIÓN ESTRUCTURAL.

La simulación estructural se lo realiza con la ayuda del software SAP-2000. v.10.

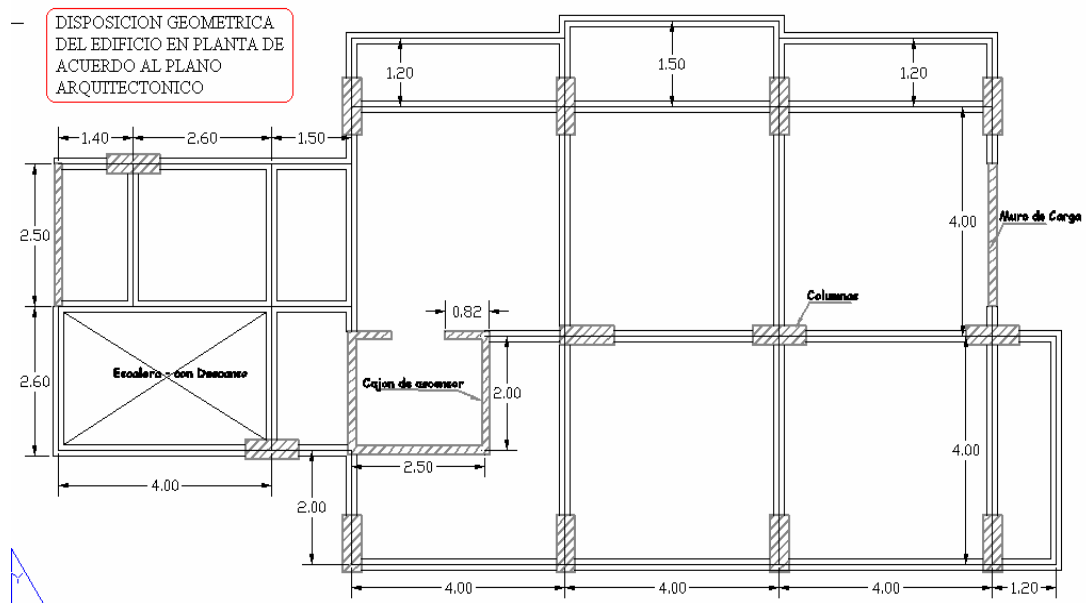
Cargando Una Estructura:

Este texto solo explica en forma macro el procedimiento de cargado de una estructura.

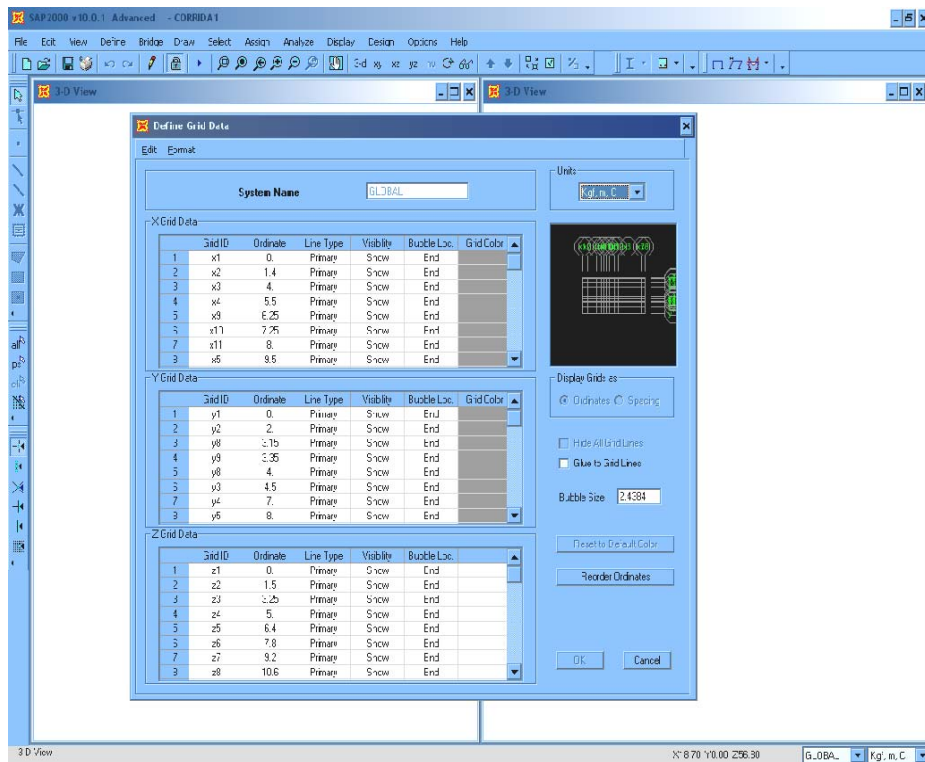
Se supone que el estudiante ya tiene conocimiento básico del SAP-2000.

No se explicara como generar frames o visualizar un momento, etc.

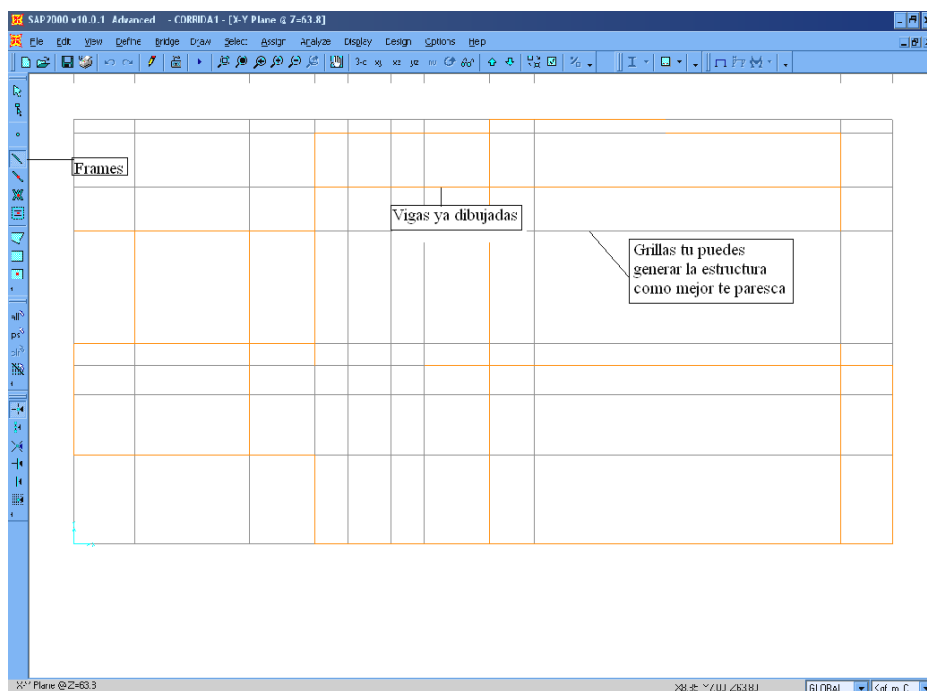
Una vez de entender el capitulo de edificios altos, podemos observar que el plano arquitectónico, presenta dificultades en espacios por la esbeltez del edificio; la disposición de las culomnas, Muros, cajón de Ascensor para resolver la estructura debe estar de la siguiente forma sin quitar muchos espacios requeridos.



PASO 1. Definimos las grillas como mostramos a continuación.

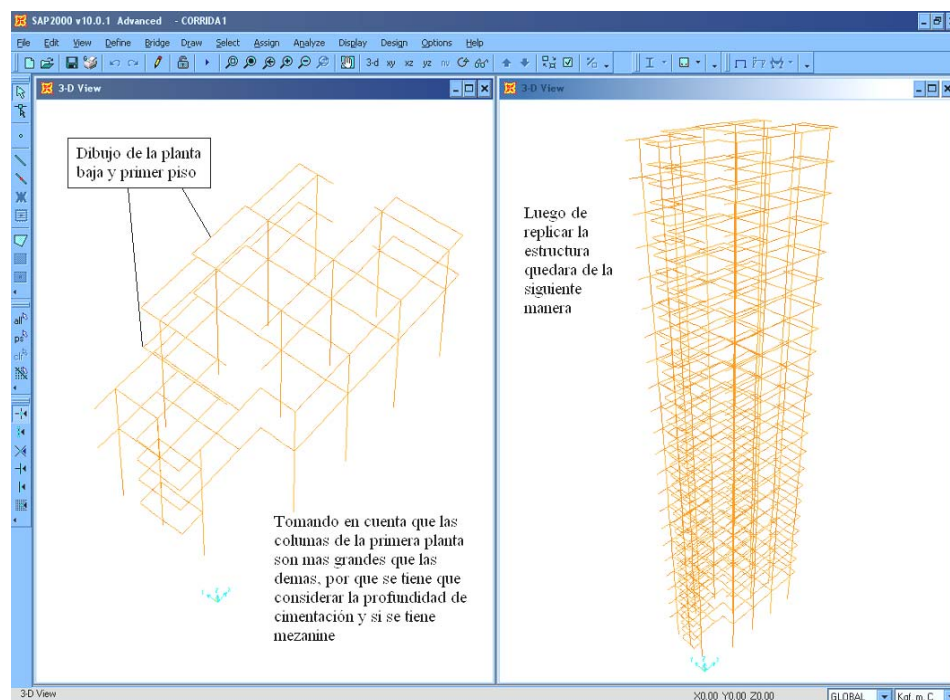


Estas grillas generamos para que sea mas fácil la generación de nuestra estructura, mostrándonos una ayuda como el Excel, es como dibujar a mano alzada.



PASO 2.

Replicando la estructura, para que el dibujo no sea moroso, teniendo en cuenta que la planta baja será muy diferente en altura a los demas pisos.



MURO DE CORTE: Generalmente es el cajón de ascensor, es aconsejable colocar este muro de corte en el centro para que absorban en gran medida los esfuerzos que se originan.

Pero observando la geometría en planta no podemos recurrir a eso ya que tenemos poco espacio en uno de los lados obstruyendo así la disposición arquitectónica para la cual fue creada el plano, pero colocamos muros de corte a los extremos y el cajón de ascensor al lado de la escalera, así ayudando a soportar dichos esfuerzos sin modificar los espacios.

La discretización de las losas se realiza después de dibujarlas en las vigas:

Elegimos la losa que deseamos discretizar, seleccionándolo y luego con

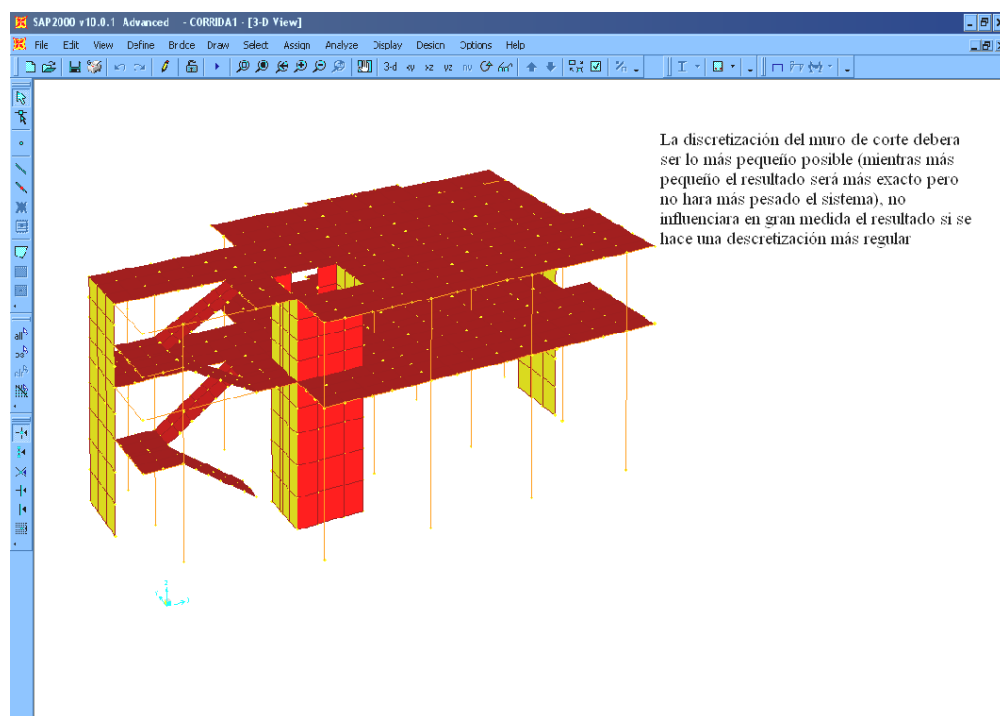


dividiendo en “X” y “Y” el numero que deseamos. Debiendo las

vigas en el mismo numero de cada lado, seleccionándolo y luego con

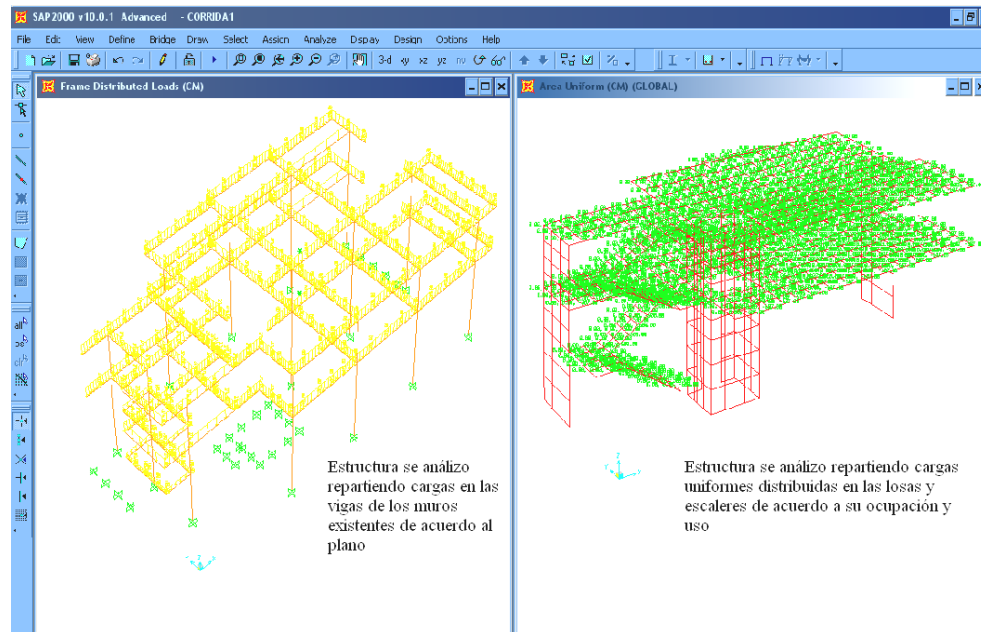


dividimos la viga, mostrando así una discretización uniforme entre las vigas y las losas.



PASO 3.

El siguiente paso es la asignación de cargas tanto a los muros como a losas, tanto cargas muertas como cargas vivas.



Replicando la estructura una vez terminada de cargas, debiendo tener en cuenta que el ultimo piso será la terraza (techo), se deberá modificar las caras vivas y muertas, y añadir una carga de nieve en caso de que la estructura se encuentre en un clima muy frío.

En este caso la estructura es de 20 pisos como se muestra en la figura:

PASO 4.

Una vez terminada de dibujar, cargar toda la estructura con sus respectivas cargas; aplicamos el **trecho rígido**, ocultando todas las losas seleccionando todo la estructura con **End (Length) Offsets...**, desplegándonos una ventana en el cual seleccionamos automatic from connectivity y en el factor de rigidez colocamos **1** (Rigid-zone factor).

Para el **diagrama rígido de piso** mostramos las losas, seleccionando un piso le asignamos un **Assign** → **Constraints...**, desplegando una ventana seleccionando Diaphragm, adhiriendo uno nuevo en coordenadas del sistema global, asignando automático; Conociendo que dicho procedimiento se debe realizar para cada piso.

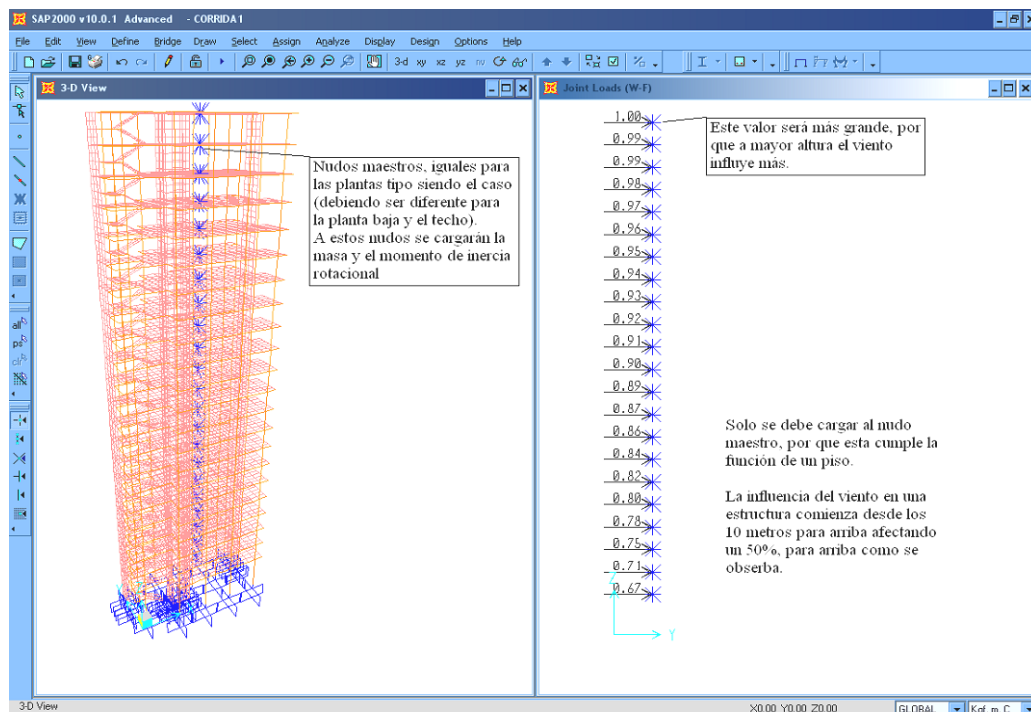
Dándonos como resultado, masa traslacional, peso del nivel y la inercia rotacional, teniendo la ubicación del centro de gravedad (nudos maestros).

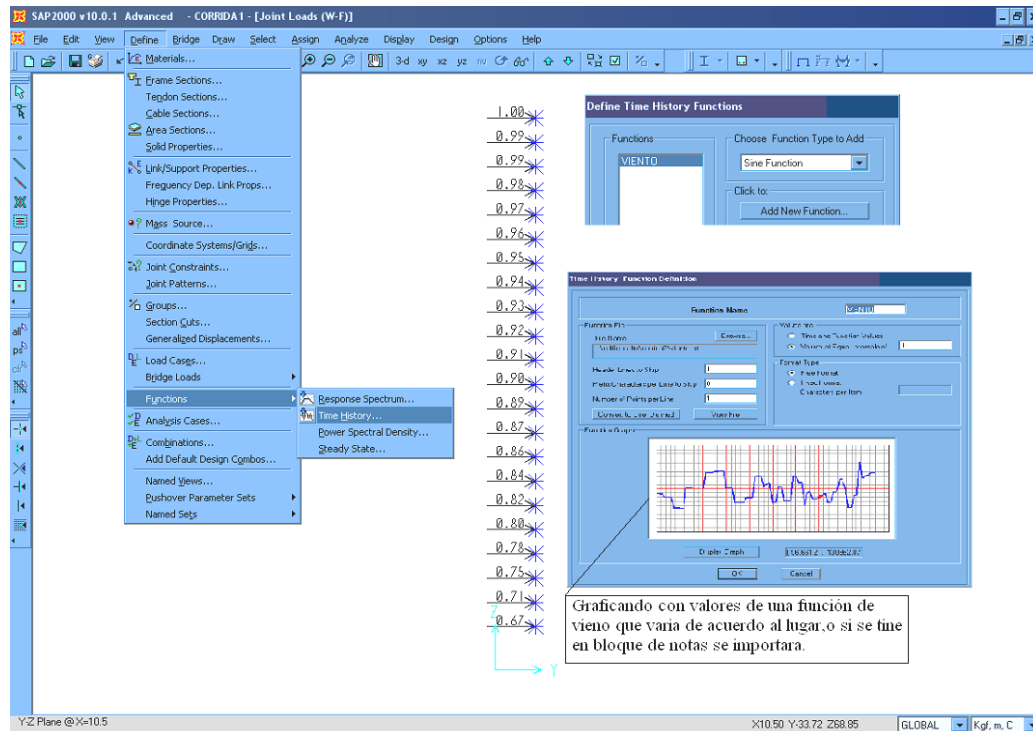
COLOCANDO NUDOS MAESTROS: Los nudos maestros simulan el movimiento de la losa, con las coordenadas del análisis que obtuvimos colocamos los nudos maestros.

Asignando en los nudos maestros Joint Masses, colocando en Masses In Local Directions la Dirección **1** y **2** la masa traslacional hallada, y en Mom. Of Inertia In Local Directions la Rotation About **3** la inercia rotacional.

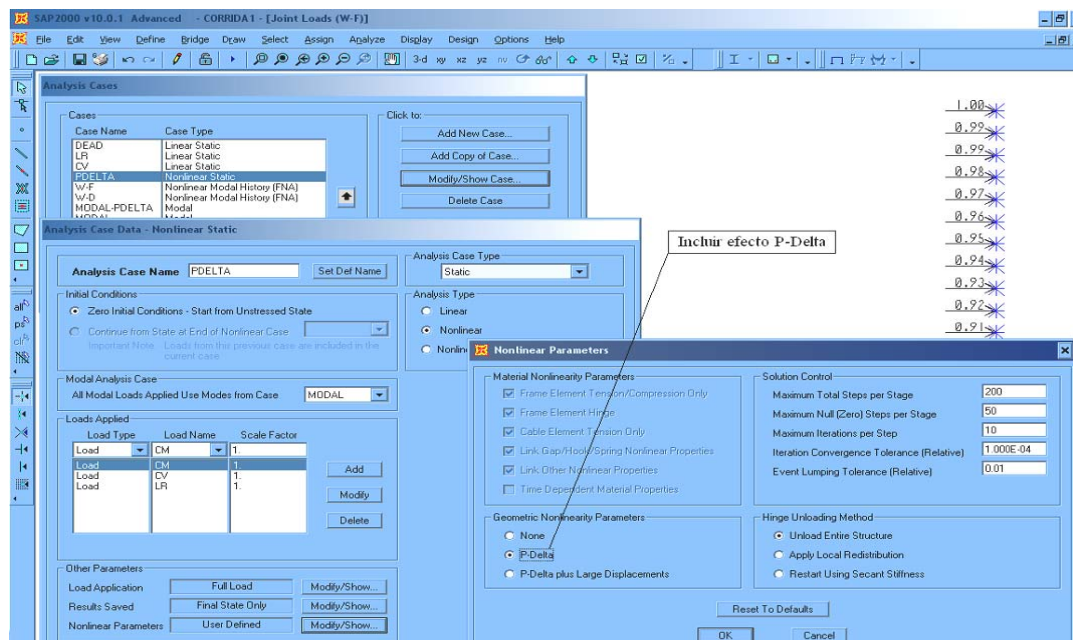
CARGANDO DEL VIENTO DINAMICAMENTE: Con los siguientes pasos a seguir:

- Seleccionamos los nudos maestros.
- Aplicando el porcentaje de la carga (a la parte más alta grande $P=1$ unidad y todos los demás son porcentajes y estas cargas serán estáticas que irán decreciendo de arriba a abajo).
- Definir la función del tiempo y Historia.
- Definir los casos de viento.

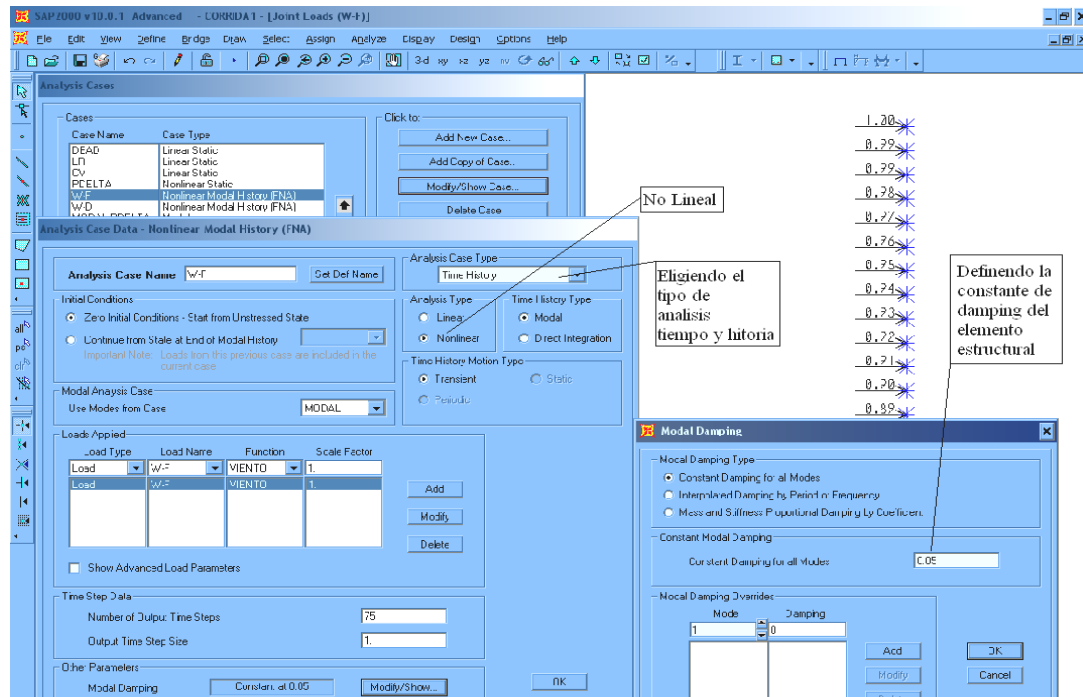




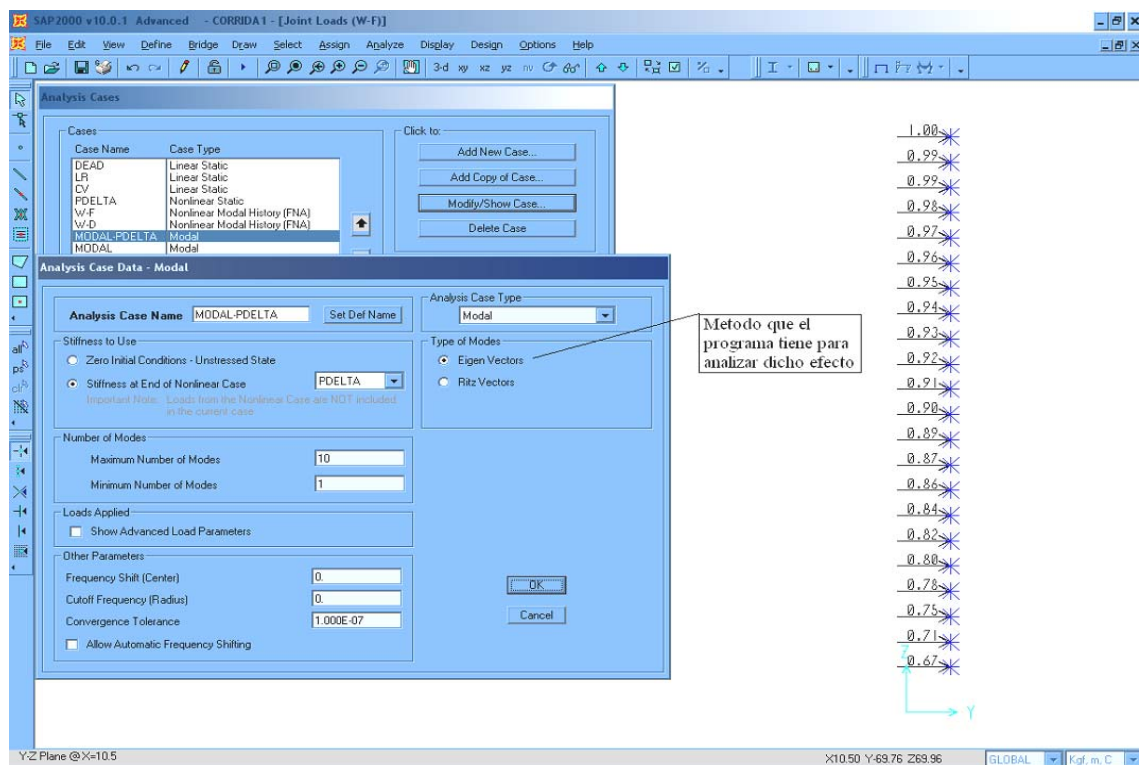
Al viento debemos incluir en análisis dinámico con el efecto P-delta, click en esta opción y tendrá que aparecer algo así:



Donde las cargas de viento son como se muestra:



Sacándole una copia al efecto P-delta que interactué, recomendado por el programa:



PASO 6.

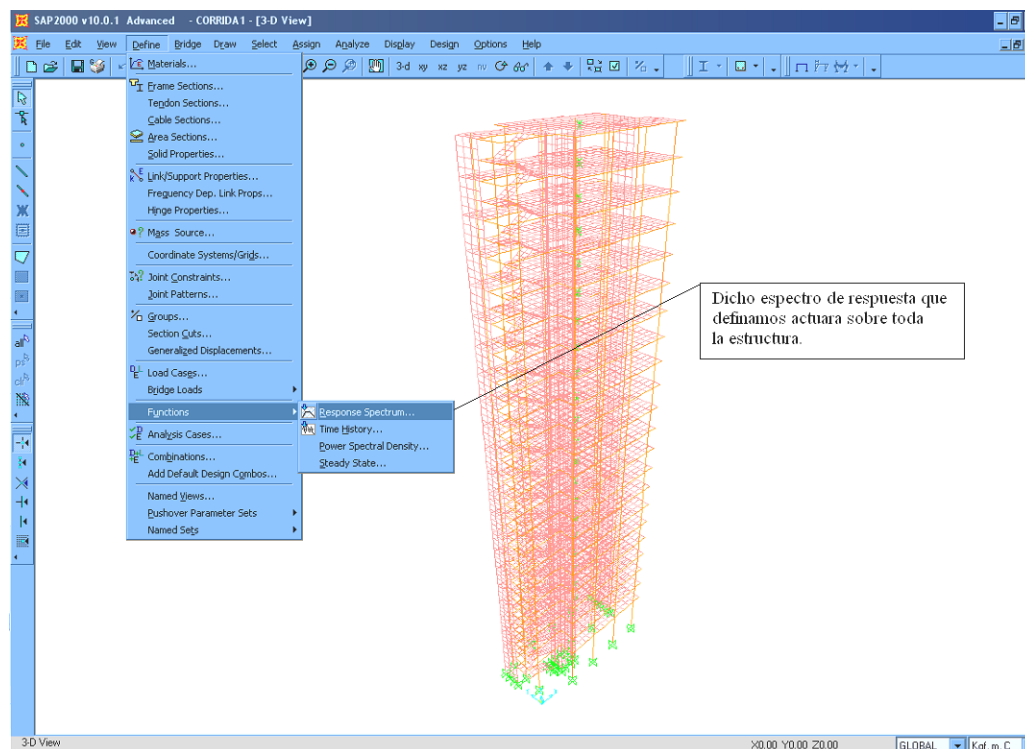
Para el efecto del sismo se debe definir el espectro de respuesta.

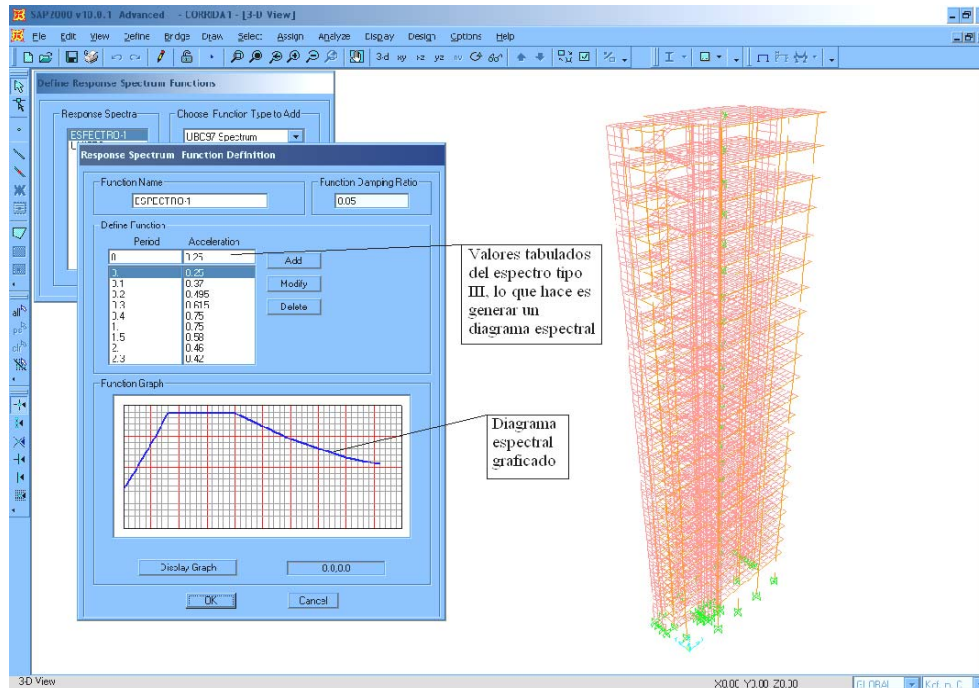
Las cargas espectrales que usaremos para este ejemplo son:

Dir-X (U1): espectro tipo III.

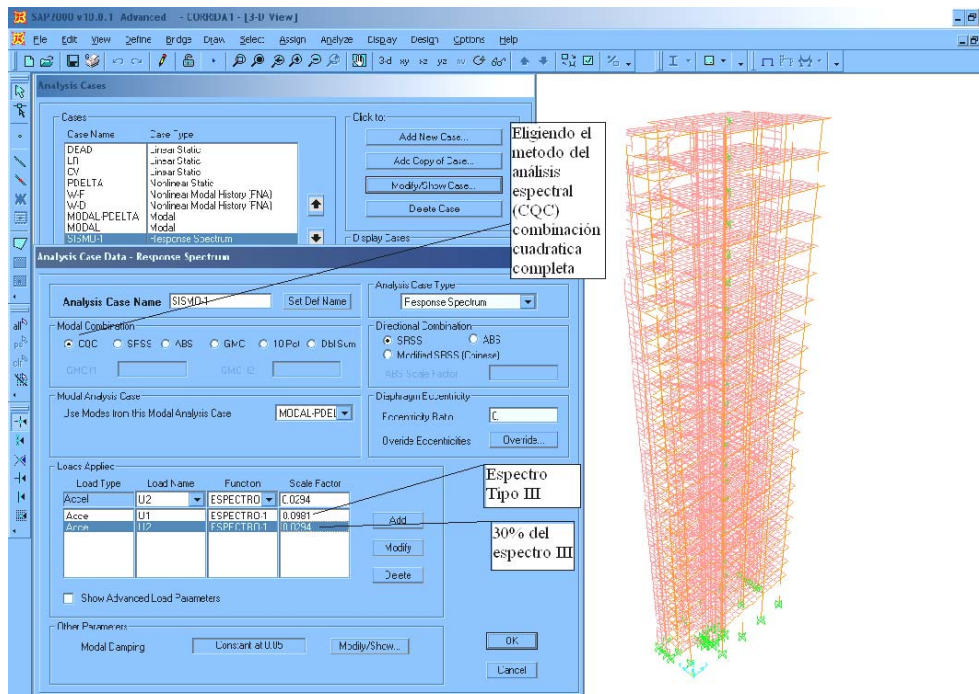
Dir-Y (U2): 30% del espectro tipo III.

El espectro tipo III corresponde a una Zona Sísmica 3, de peligrosidad Sísmica elevada con suelo granular poco denso.

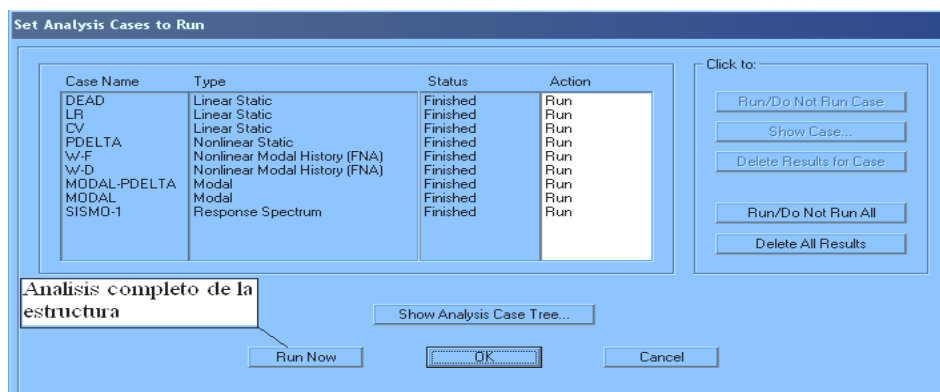




En el análisis de cargas del sismo, definimos dichos porcentajes que actuarán como se observa:



Definiendo ahora las combinaciones de las cargas que actúan en la estructura y definiendo la envolvente que es donde actuaran los máximos esfuerzos hacemos correr el programa:



Observando que no existan errores en el análisis, luego observamos los máximos desplazamientos en las puntas con la tabla de criterio de confort humano (pagina 51), el caso de no cumplir volver a modificar la geometría de la estructura y volver a analizar.

ANEXO B

GUÍA DE PROYECTO PUENTE COLGANTE

INTRODUCCIÓN.

Los Puentes colgantes son de aspecto armonioso y de extensa aplicación, salvan los más amplios tramos de todo el mundo; el de Goleen Gate, entrada a la bahía de San Francisco (California), tiene 1281 metros de longitud.

Los principales elementos de estos puentes son los cables suspendidos de torres y anclados por sus extremos a los pilares de sujeción. Tales cables, compuestos generalmente por miles de alambres paralelos de acero galvanizado, de 5 mm de diámetro generalmente, agrupados para formar una sección circular, llevan un enrolamiento en espiral de alambre que mantiene su forma cilíndrica al tiempo que los impermeabiliza.

El presente trabajo de la materia tiene por objeto de simular el comportamiento de un puente colgante que bordea los 1720 metros de longitud con cables inclinados, con un peralte de 1% desde el medio del vano central, ante efectos de carga peso propio, cargas vivas (móviles) y la acción dinámica derivada del viento.

En este sentido resulta importante la geometría y rigidez de la estructura ya que observando los desplazamientos, cambiando la geometría y separación de los pendolones, para ello la concepción esquemática de sus elementos estructurales, mas que todo las torres, deben presentar una disposición de tal forma que precautele los desplazamientos de la plataforma conociendo que el vano central debe deformarse aproximadamente igual a los vanos laterales, resulta indisponible la utilización de plataformas con vigas rigidizantes soportadas

por los pendolones, estas por los cables principales siendo transmitidas las cargas a las torres.

En conformidad de estos propósitos nuestra estructura contempla estos criterios para salvaguardar grandes obstáculos.

CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRUCTURA.

Para el desempeño del proyecto se adoptara toda la información de la Zona, ya sea desde su localización, la luz del puente. Por ende esta primera parte del proyecto contempla los siguientes puntos:

- Longitud del puente colgante.
- Datos de la geometría asumida.
- Norma empleada.
- Nombre del Software empleado.

Características del Puente.

Longitud del puente: Los diseños modernos de carreteras y autopistas imponen condiciones muy exigentes de pendiente, curvatura y altura sobre los causes, lo que unido a las condiciones topográficas y fluviales. Con todo conocer la longitud del puente.

Datos de la geometría asumida: Conociendo la longitud del puente se decide el tipo de puente colgante que se optara, los pendolones, el tipo de viga rigidizante, la disposición de las torres toando en cuenta la su altura de acuerdo a la flecha del cable principal.

Norma empleada: Especificar siempre la norma que se empleara.

Nombre del Software empleado: El programa de simulación estructural empleado para las solicitudes y acciones en los elementos estructurales es la versión 9.o..10 No lineal del SAP-2000.

ALCANCE DEL PROYECTO.

El proyecto posee un grupo de requerimientos que avalan con más garantía la representatividad de la geometría de un puente colgante, para ello se distinguen las siguientes características.

Simulación Estructural:

La concepción del modelo estructural tridimensional del puente colgante. Para ello se asocia tanto las torres, riostres, vigas rigidizantes y cables como elementos unidimensionales, denominados **frames** en tanto los puntos de intersección de los mismos como nodos **joints**. El análisis de las losas se puede realizar: Repartiendo las cargas a las vigas rigidizantes, pendolones, cable principal y torres; colocando elementos **sells** a las vigas y luego discretizandolos.

Utilización de trechos rígidos:

Este fenómeno que influye a la estructura en la transmisión de esfuerzos vigas rigidizantes, pendolones, cable principal y torres (columna pared) conectados todos entre ellos, proporcionando una rigidez infinita, generando partes indeformables, se les denomina trechos rígidos. Para ello el Sap-2000 posee la opción **EndOffset** que establece a partir de un porcentaje de la mitad del ancho del elemento los resultados que nos proporciona.

Diagrama Rígido de Piso:

En la idealización tridimensional es usual considerar las losas con rigidez infinita para la deformación en su propio plano, como también despreciar la rigidez de flexión en losas. Se dice entonces que el comportamiento se asimila a diafragmas. Para ello la idealización con lleva la discretización en elementos finitos. La implementación de estos conceptos en el simulador estructural con lleva la selección de los nodos de la losa y atribuirles una restricción tipo **Diafragma**.

Consideración Dinámica del Viento:

La gran geometría del puente en cuanto a sus dimensiones hace que el viento sea el principal factor de diseño, tomando en cuenta que altas velocidades del viento puede causar

grandes daños, un ejemplo claro el puente Tacoma inaugurándose en 1940, siendo destruido 4 meses después por una tormenta moderada, de vientos de casi 68 kilómetros por hora. El puente de 1643 metros de largo, atrapaba el viento en lugar de dejarlo pasar, provocando que la estructura ondulara como una “montaña rusa” colapsando el vano central.

La ciencia de la aerodinámica de los puentes nació tras el desplome del Tacoma, que enseña a los ingenieros que el viento no solo causa cargas estáticas en los puentes, sino que también implica acciones dinámicas.

Esta consideración dinámica del viento se resuelve con el software Sap-2000 bajo el influjo de la opción **Time History Function** donde se refleja la variación del impacto del aire en forma de fuerzas en los nudos a través del tiempo. Para ello se hace indispensable la creación de un estado de carga que sirva de multiplicador de las fuerzas que se definieron en el **Time History Function**. Cave acotar que los periodos de suceso del evento (ráfaga de viento) no deberán coincidir con el periodo propio de la estructura, esto llevaría al colapso de la estructura para alcanzar resonancia.

Conociendo que la simulación de acción del efecto de viento en puentes colgantes, se hace real y aproximada, construyendo a escala el puente sometiendo a grandes velocidades de viento, túnel de viento. Observando así los desplazamientos.

Consideración de Dilatación Térmica del Material:

Como ejemplo el puente Goleen Gate de San Francisco, supongamos que la temperatura en san francisco, el mes de enero puede llegar hasta 12°C, y que en el verano llegue a 29°C . Consideremos también como factor de seguridad (margen de error) que las temperaturas pueden ser hasta -20°C en invierno y hasta 45°C en verano. Queriendo decir que el puente debe soportar diferencias de temperatura de 65°C. Si hacemos los cálculos que normalmente realizan los ingenieros constructores y consideramos una longitud de referencia, encontramos que a una temperatura -20°C el puente se acorta (o reduce) 61 cm. En el verano, los cálculos indican que, para 45°C, el puente se alarga 39 cm.

En total hay una modificación entre los límites de temperatura, de “1 metro” , si los constructores de puentes no tomaran en cuenta la magnitud de dilatación, la estructura se destruiría.

DETERMINACIÓN DE CARGAS

Antecedentes: Esta etapa del proyecto esta destinada a definir las distintas acciones y sus magnitudes de las mismas que por cierto recaerá en los distintos elementos estructurales. Como es proceder deberemos generar un modelo estructural del puente que simulara los elementos estructurales llámense vigas, Torres, riostres, cables, fundaciones, etc. Estos elementos serán sustituidos por barras o nodos que por su carácter unidimensional solo soportaran cargas lineales o puntuales. Por tal causa las cargas que en la realidad se comporten de diferente manera a esta (lineal o puntual), deberemos equipararlas con cargas de ese tipo tratando de que los efectos sean casi similares.

Análisis de Cargas: las acciones son asumidas como fuerzas concentradas y distribuidas o deformaciones indispuertas o impedidas que son aplicadas sobre la estructura De acuerdo a la forma de aplicación, se tienen acciones directas e indirectas, las primeras se dividen en permanentes, variables y extraordinarias y las indirectas en reológicas, térmicas, movimientos impuestos o acciones de viento.

En el presente estudio solo consideraremos las acciones directas permanentes (Carga muerta) y variables (Carga viva o móviles), temperatura y viento.

Acciones permanentes o cargas muertas (CM). Este tipo de cargas se denominan como permanentes por el hecho de que actúan en toda circunstancia ya que constituyen la misma estructura, estas pueden ser:

Peso propio de los elementos estructurales: Peso de torres, vigas rigidizantes, riostres, losas.

Peso propio de unidades constructivas: cables y pendolones.

Peso de instalaciones fijas, etc.

Acciones variables o cargas vivas (CV móviles).

Se diferencian de las anteriores porque su accionar es aleatorio en el tiempo. De igual forma pueden constituirse de forma concentrada o distribuida. Entre las más importantes, se tienen las siguientes Acciones:

Acciones variables: Peso de las personas, peso de automóviles, vehículos, etc.

Acciones climáticas, Temperatura que varían con la acción del viento, lluvia, nieve, etc.

Acciones del terreno, se deben a su peso y fuerzas de empuje del terreno.

Acciones variables debidas al proceso de construcción.

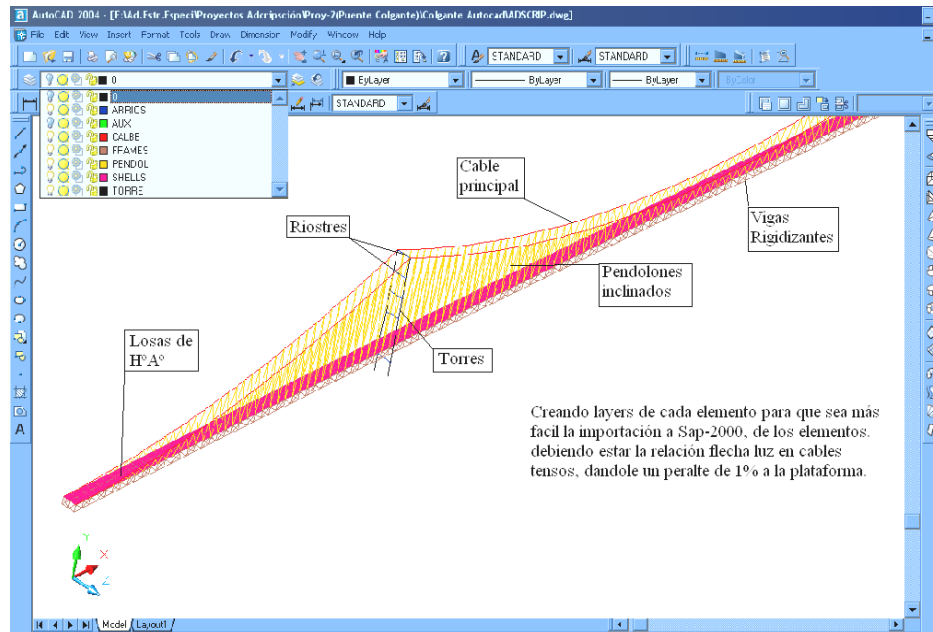
SIMULACIÓN ESTRUCTURAL.

La simulación estructural se lo realiza con la ayuda del software SAP-2000. v.10., Autocad-2004 en la generación de la geometría del puente.

Geometría de la Estructura:

La relación de flecha luz debe ser menor o igual a $(1/8)$ estando dentro los cables tensos, la altura de la viga rigidizante $h = \frac{L}{100}$ (general para puentes camineros), el ancho del camino de acuerdo al numero de vías, la altura da la plataforma hacia la cota de fundación se conoce haciendo estudios, como estudio de suelos, estudios hidrológicos, y la altura de la mas grande de embarcación actual, etc. Conociendo la flecha, la altura de la viga rigidizante, el espesor de la plataforma y asumiendo un mínimo de 1.5 metros de altura de la plataforma al cable principal del vano central podemos conocer las alturas de las torres.

Dibujando la geometría de los elementos estructurales del puente colgante y generando capas (layers) de trabajo, como se observa en la siguiente figura.



Guardando la geometría de la estructura en DXF se podrá importar del Autocad todos los elementos al Sap.2000.

Cargando Una Estructura:

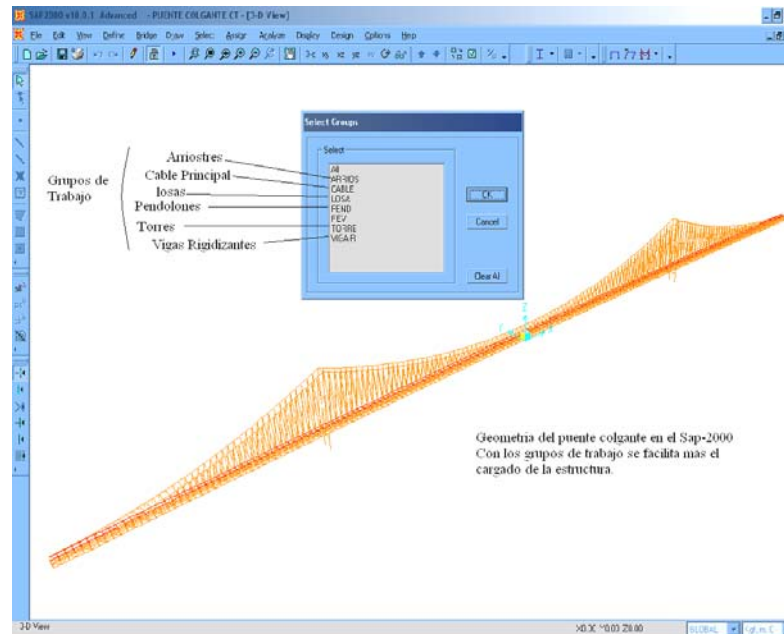
Este texto solo explica en forma macro el procedimiento de cargado de una estructura.

Se supone que el estudiante ya tiene conocimiento básico del SAP-2000. No se explicara como generar frames o visualizar un momento, etc.

PASO 1. Importamos los elementos del Autocad (formato DXF), sabiendo que fueron dibujados en metros como mostramos a continuación.

Con File/ Import/ Autocad,dxf.file..., eligiendo las coordinas y las unidades de trabajo.

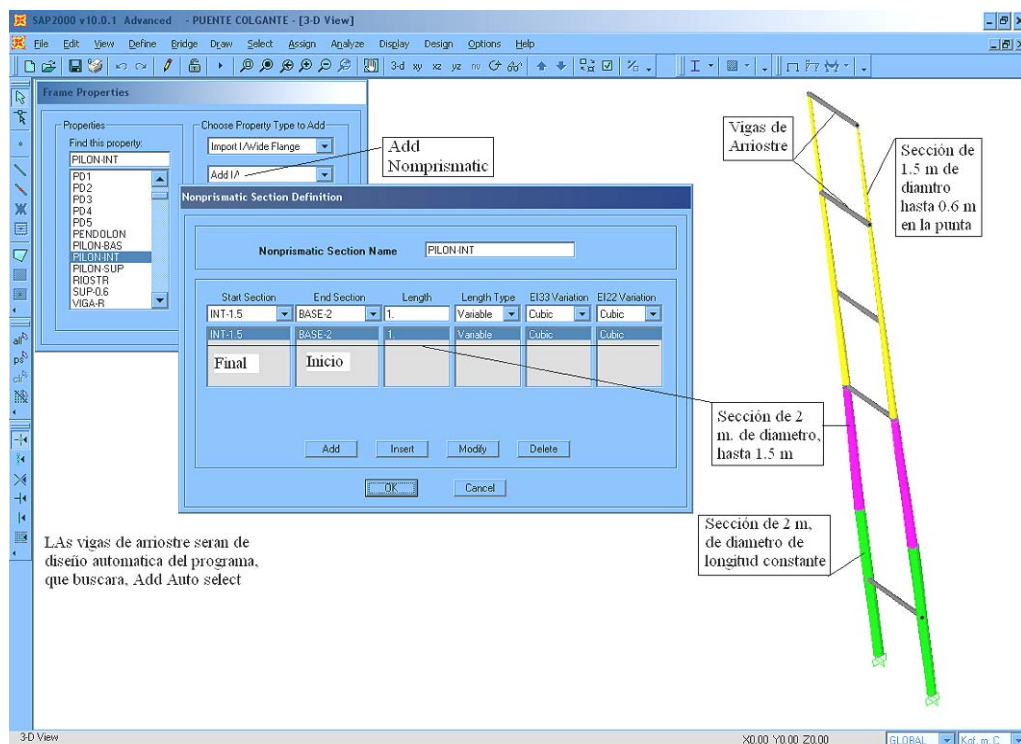
Eligiendo cuales serán Frame y Shells, debiendo generar grupos en cada importación para que cuando definamos los elementos y cargas sea mas fácil.



PASO 2.

Las seccion utilizada en las torres, serán de acero, de forma variable en funcion a la altura de 2 hasta 0.6 metros en diámetro y de 10 centímetros de espesor.

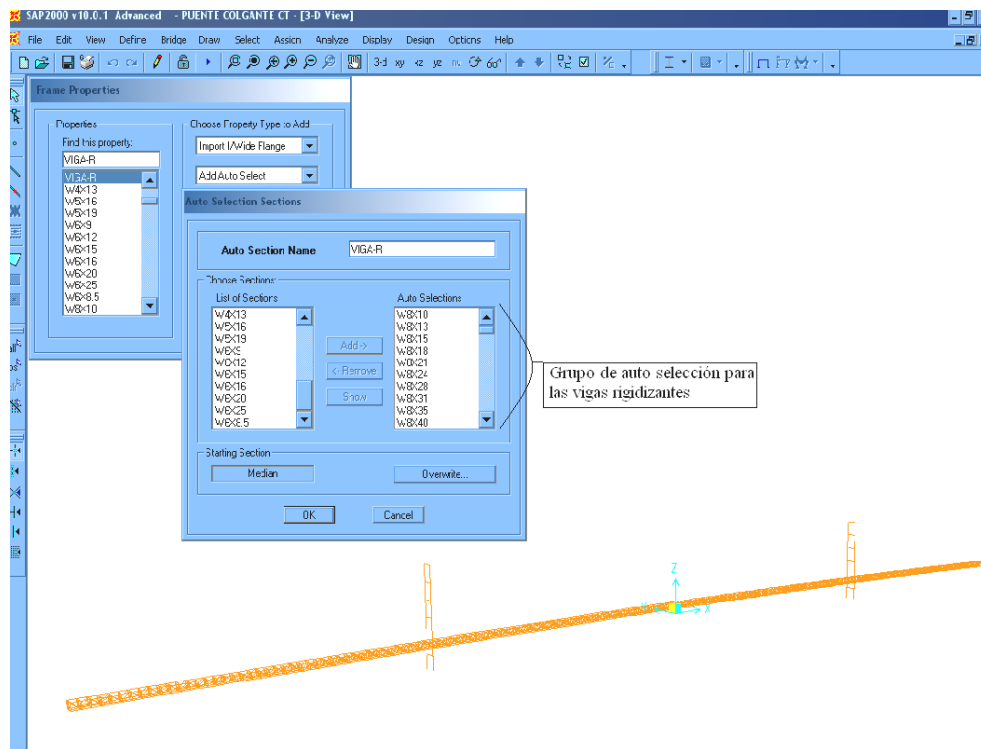
Para la sección variable se utiliza Add Nonprismatic como se observa en la figura.



PASO 3.

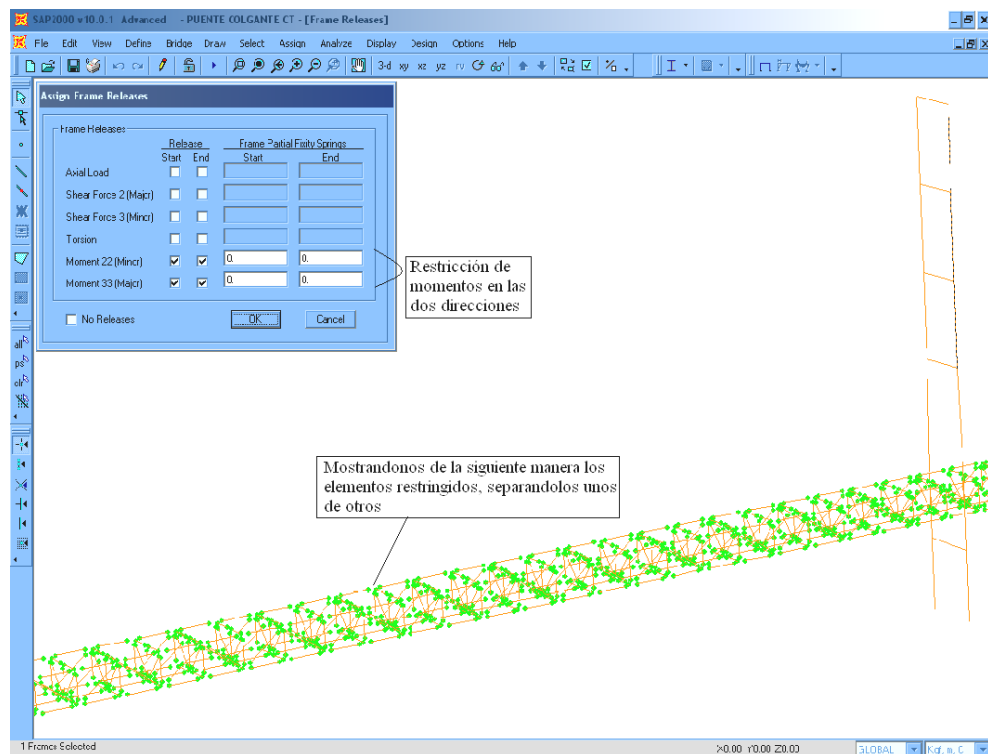
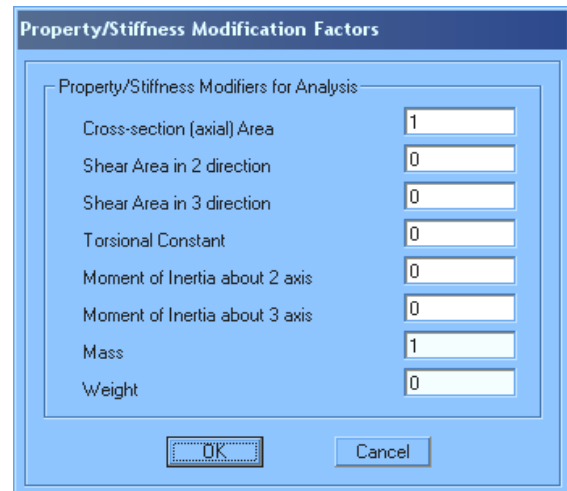
Las vigas rigidizantes serán también, de auto selección del programa de una serie de perfiles W8x10 hasta W44x335. Cuando se haga correr el programa se seleccionara el perfil adecuado para que resista dichos esfuerzos, seleccionando solo las vigas, así visualizando mejor, seleccionamos los elementos para luego asignar el grupo de auto selección definido.

Con Select → select → Groups.. marcando dicho grupo, para luego Assign → Frame/Cable/Tendon → Frame Section (seleccionando el grupo de auto selección).



De la misma manera creamos un rango entre los pendolones y el cable principal para que el programa nos de las secciones adecuadas para luego proceder, con la verificación de la sección, tomando en cuenta tanto cable como pendolón debe restringirse sus propiedades por que solo actúan a tracción y compresión, como se observa en la siguiente cuadro.

Las vigas rigidizantes deben ser restringidas sus esfuerzos ya que trabajan a tracción y compresión, seleccionando el grupo vamos a Assign → Frame/Cable /Tendon → **Releases/Partial Fixity...**, desplegando un cuadro, al cual le restringimos los momentos como se observa.

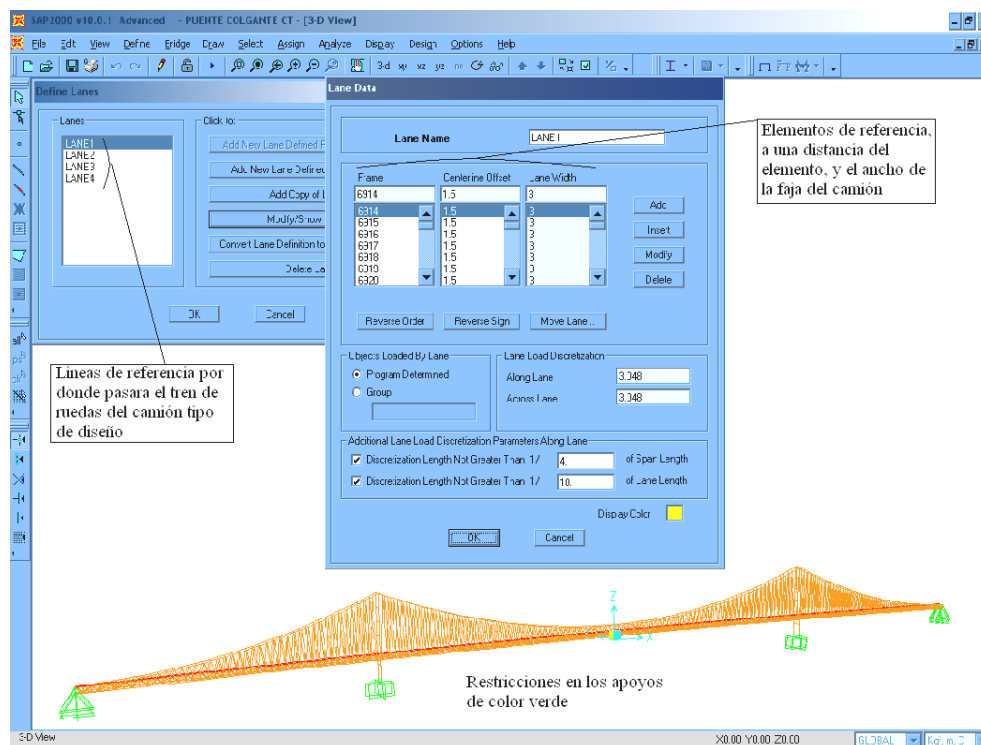


Después se asigna Display → Show Underformed, destacando que dicha restricción fue asumida.

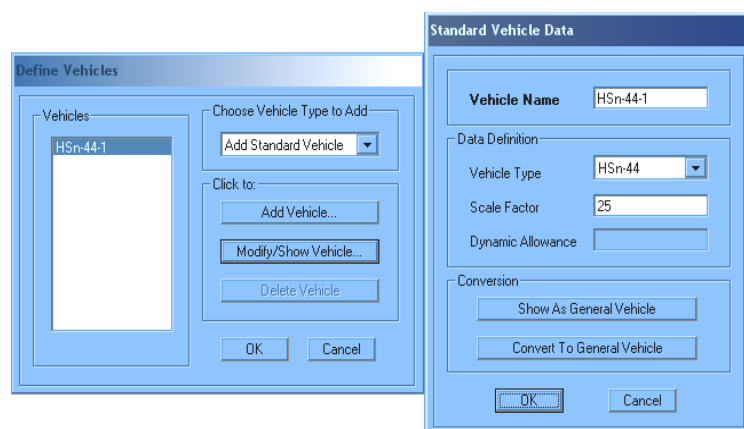
La restricción en los apoyos de los extremos del puente son apoyos fijos, de la torres en las fundaciones es empotrado.

PASO 4.

Cargas móviles se utilizara un tipo de camión el HS-25, el programa Sap2000 utiliza un elemento de la estructura como referencia. En la barra de herramientas existe una opción Bridge, en la cual tenemos los Lanes (líneas por donde pasaran el tren tipo del camión), Vehicles (seleccionando el tipo de vehiculo) y Vehicle Classes (donde se coloca el factor de mayoración de la carga por impacto).



Definiendo el tipo de vehiculo estándar:



Donde modificamos el nombre del vehiculo, el tipo de vehiculo, y el factor de escala para que sea el camión HS25.

Colocando el factor de mayoración a la carga debido a la carga de impacto producida por el motor de vehiculo:

Define Vehicle Classes

Classes: VECL1

Click to:

Add New Class...
Modify/Show Class...
Delete Class

OK Cancel

Vehicle Class Data

Vehicle Class Name: VECL1

Define Vehicle Class

Vehicle Name	Scale Factor
HSn-44-1	1.2
HSn-44-1	1.2

Add
Modify
Delete

OK Cancel

Definiendo el tipo de carga, colocando el vehiculo, las líneas, la longitud total del puente, la dirección que lleva de ida o vuelta, y la velocidad de diseño que lleva, como se observa a continuación.

Define Loads

Load Name	Type	Self Weight Multiplier	Auto Lateral Load
CAMION	MOVING LOAD	0	
MUERTA	DEAD	1	
CAMION	MOVING LOAD	0	

Click To:

Add New Load
Modify Load
Modify Moving Load...

Multi Step Moving Load Generation

Vehicle	Lane	Start Dist	Start Time	Direction	Speed
HSn-44-1	LANE1	0.	0.	Forward	50.
HSn-44-1	LANE1	0.	0.	Forward	50.
HSn-44-1	LANE2	0.	2.	Forward	40.
HSn-44-1	LANE3	1720.	0.	Backward	50.
HSn-44-1	LANE4	1720.	2.	Backward	40.

Add
Modify
Delete

Note: Vehicles that are defined using a uniform load will not be included in the program generated multi-step analysis case. Click this note to see a list of vehicles defined using uniform loads.

Load Discretization Information

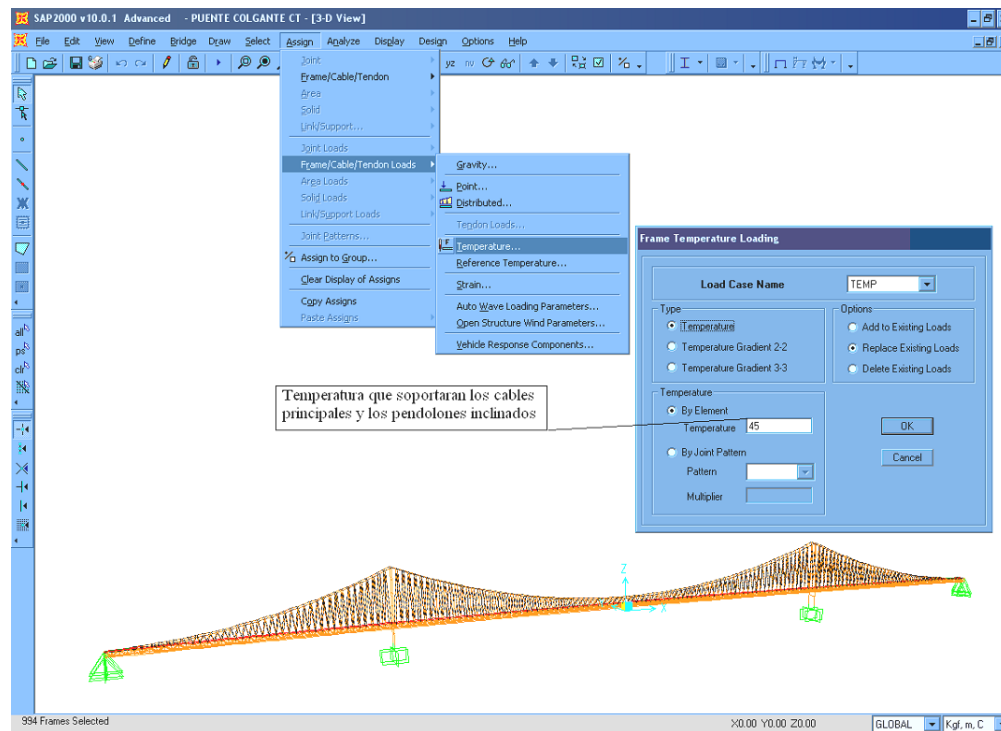
Duration of Loading is: 20. seconds
Discretize Load every: 1. seconds

Units: Kgf, m, C

OK Cancel

PASO 5.

Colocando la carga por temperatura seleccionamos cables y pendolones, como se observa en la siguiente figura.

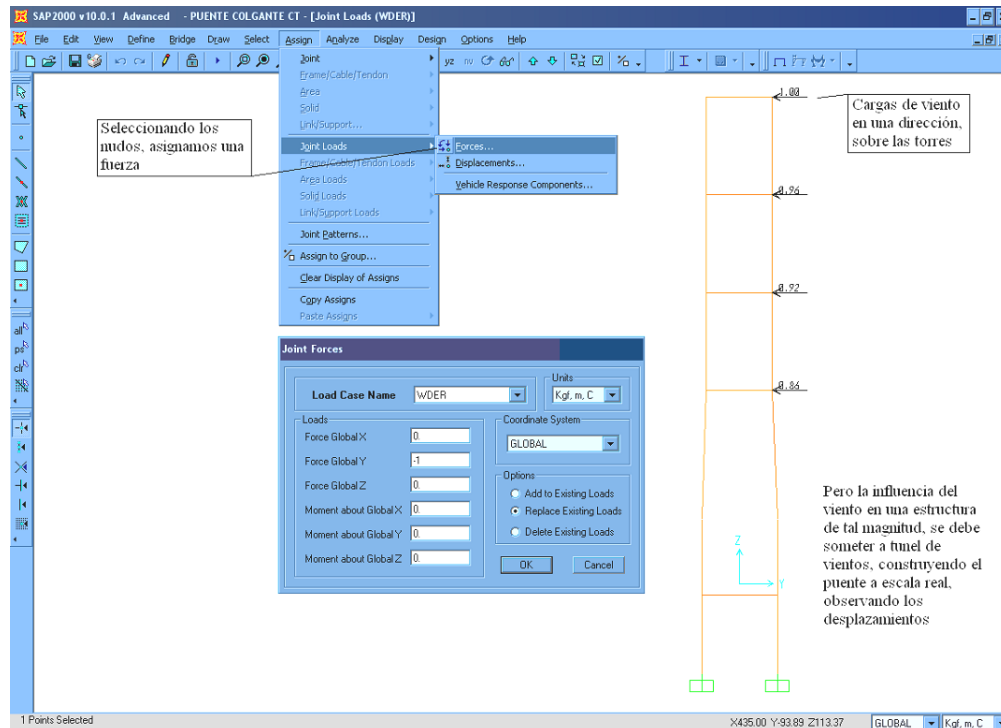


En la definición de tipo de carga Define → Load Cases.. (en el tipo de carga colocamos como otra) Other, con factor multiplicado cero.

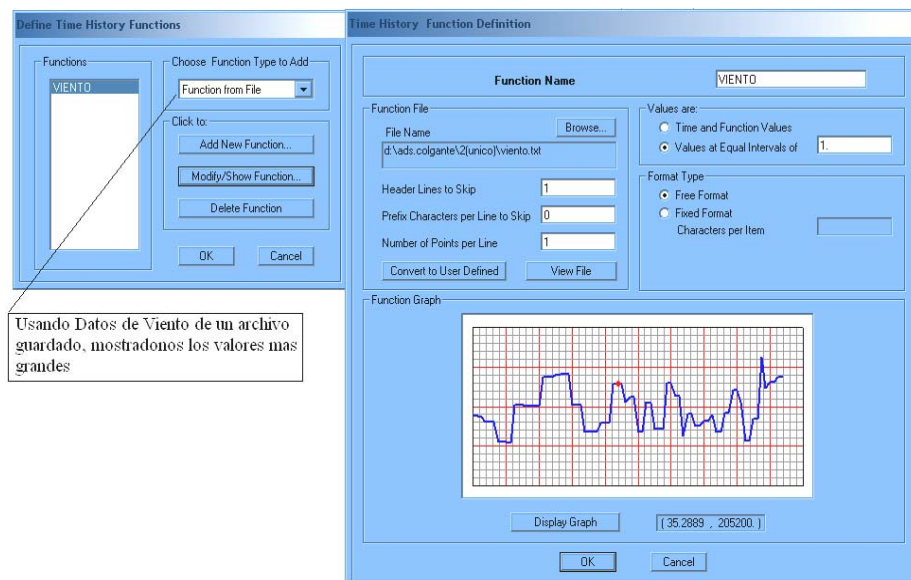
PASO 6.

Para la carga de viento hacemos como el anterior proyecto, cargando a todos los nudos de intersecciones de cables principales con los pendolones los porcentajes de influencia respecto su altura desde la plataforma, teniendo en cuenta que el viento influye directamente a la plataforma, siendo los pendolones, cables y torres los que la sostienen.

Es decir que también se le debe cargar a la torres, como se observa a continuación.



Definiendo el historigrama de viento, para luego colocar en el análisis de cargas.



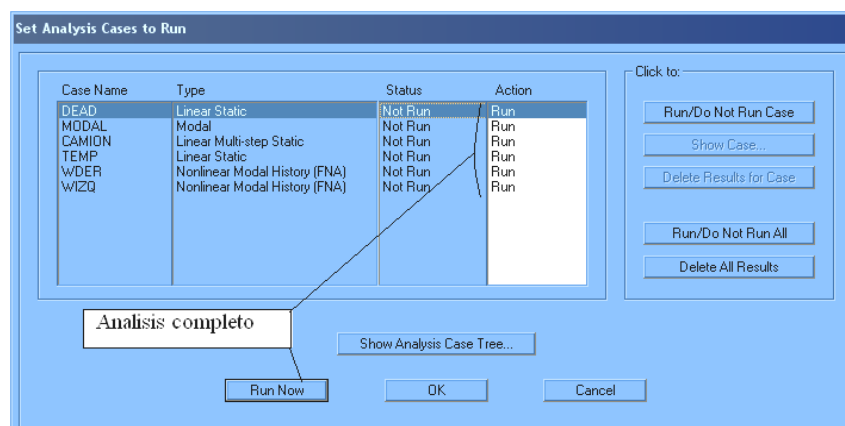
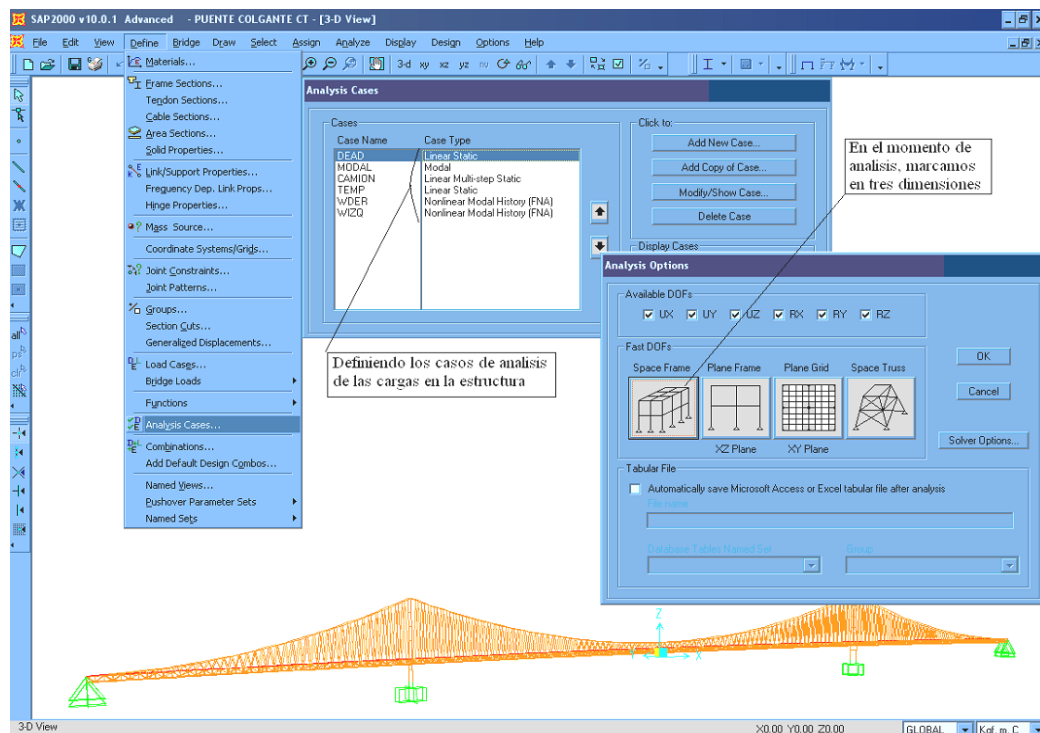
Una vez definida las cargas y cargada la estructura antes de hacer correr, seleccionamos toda la estructura aplicamos el **trecho rígido**, ocultando todas las losas, seleccionando toda la estructura, Assign → Frame/Cable/Tendon → con **End (Length) Offsets...**

desplegándonos una ventana en el cual seleccionamos automatic from connectivity y en el factor de rigidez colocamos **1** (Rigid-zone factor).

Para el **diagrama rígido de piso** mostramos las losas, seleccionando todas le asignamos un

Assign → **Constraints...**, desplegando una ventana seleccionando Diaphragm.

Definimos los análisis de las cargas como sigue.

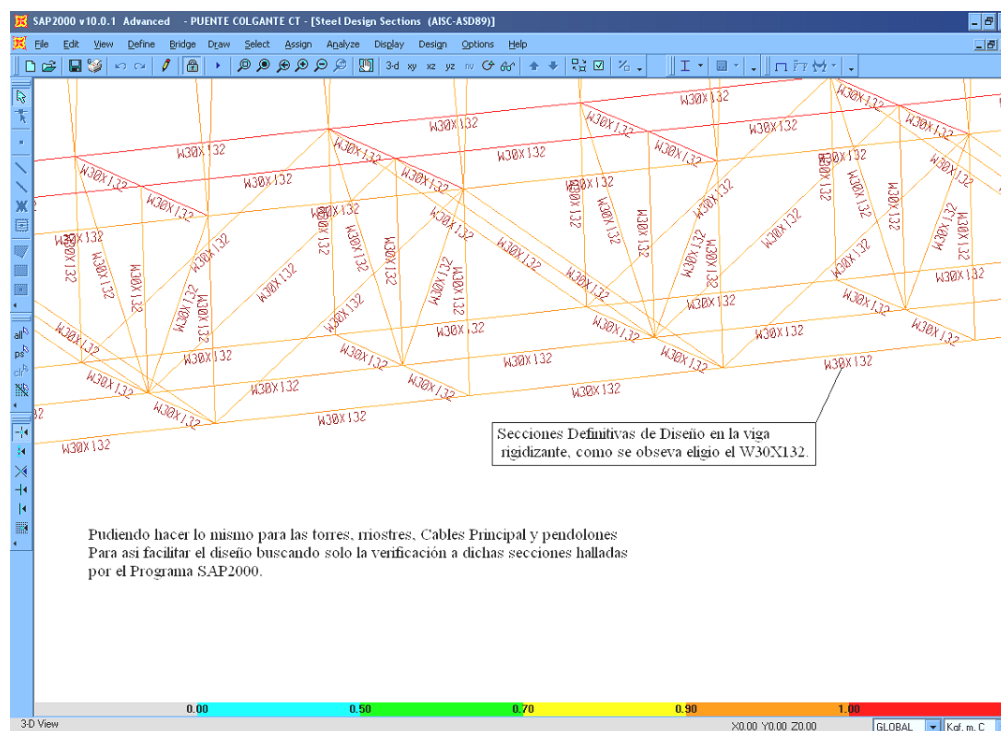


El programa Sap2000 analiza, verificando que no existan errores en el Monitor de análisis.

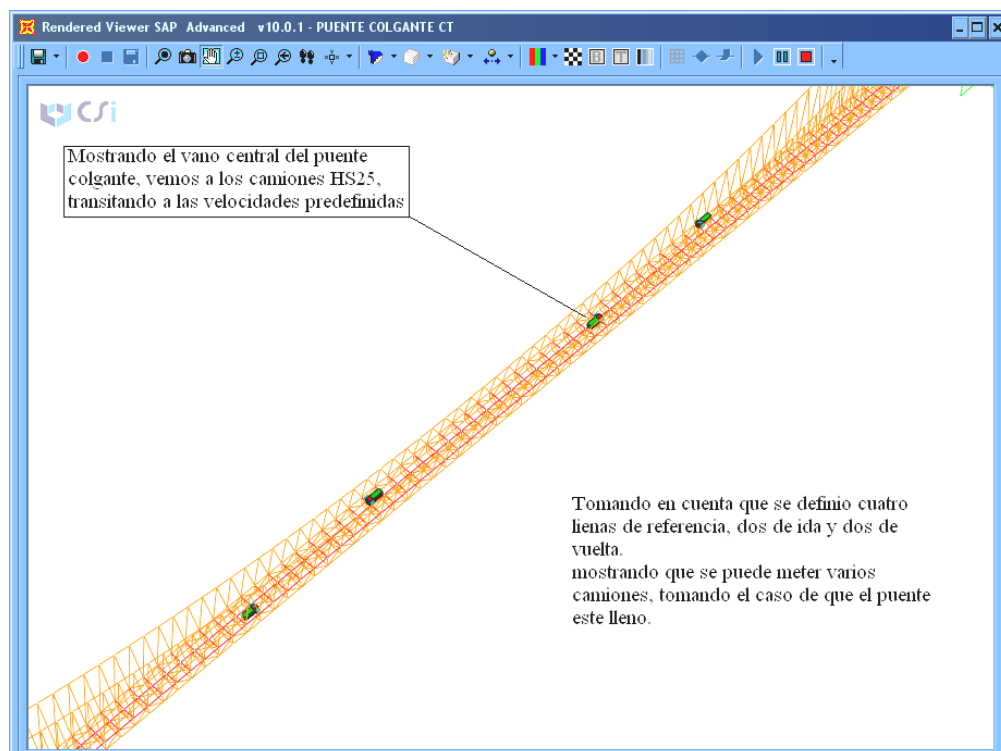
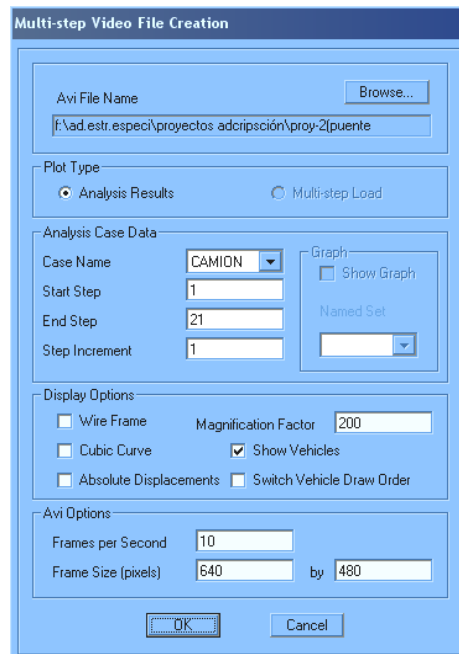
Para la sección ideal de las vigas rigidizantes, del menú Options seleccione Preferens y luego Steel Frame Design, desplegando el cuadro de dialogo Steel Frame Design Preferentes for AISC-ASD89. En este cuadro de dialogo verifique que AISC-ASD89 este seleccionado en el cuadro de listado Design Code. OK.

Haciendo la primera iteración, del menú Design → seleccione Steel Frame Design y luego Stara Design/Check of Structure.

Cuando el control de diseño se completa, la relación de esfuerzos es desplegado, la segunda iteración Pulsando el botón Run Análisis, realizando luego como la primera iteración. Para luego colocar las secciones definitivas de diseño, Select All, del menú Design seleccione Steel Frame Design y luego Make Auto Select Section Null (para actualizar las secciones Auto del marco por la dimensiones de los perfiles escogidos) pulsando aceptar.



El programa también nos muestra el camión con el cual fue modelado el puente, observando, View → Create OpenGL View..., desplegando un siguiente cuadro.



Una vez echo el análisis en el programa SAP2000, se observan los desplazamientos en el vano central y el de los extremos, lo cual no deben existir diferencias grandes en cuanto desplazamientos (deformaciones entre dichos vanos), si existiese el caso de grandes

diferencias se debe cambiar la posición de las torres, separación de los pendolones o la altura de la flecha; es decir cambiar la geometría del puente si fuera necesario para estar dentro de los criterios de simulación, para luego entrar a lo que es el diseño mismo de los elementos que componen el puente colgante.

ANEXO C

GUÍA DE PROYECTO PUENTE ATIRANTADO

INTRODUCCIÓN.

En el concepto de un puente no se halla gran complejidad. El puente soporta las cargas principales de dirección vertical actuando en las vigas. Los cables atirantados proporcionan apoyos intermedios para las vigas, esto hace que se tengan varios largos. La forma estructural básica de un puente atirantado es una serie de triángulos sobrepuestos que comprimen la pila o torre, tensionando los cables y comprimiendo las vigas como se puede apreciar en estos miembros predomina la fuerza axial.

ALCANCE DEL PROYECTO.

El presente proyecto se desarrollara la modelación estructural del puente propuesto que a su vez incluye los siguientes puntos:

- Utilización de trechos rígidos:
- Diagrama Rígido de Piso
- Consideración Dinámica del Viento
- Consideración de cargas móviles

Simulación Estructural

La concepción del modelo estructural tridimensional del puente atirantado. Para ello se asocia tanto las torres, vigas y cables como elementos unidimensionales, denominados **frames** en tanto los puntos de intersección de los mismos como nodos **joints**. El análisis de las losas se puede realizar: Repartiendo las cargas a las vigas transversales (diafragmas),

tirantes principales y finalmente transmitiendo a las torres; colocando elementos **shells** en este caso se simulara la sección cajón. Es de gran importancia destacar que la modelación se realizo en la etapa de servicio siendo de gran importancia realizar simulaciones en la etapa de construcción ya que los efectos dinámicos de viento pueden causar situaciones mas adversas en esta etapa.

Utilización de trechos rígidos:

Este fenómeno que influye a la estructura en la transmisión de esfuerzos vigas rigidizantes, cables y torres (columna pared) conectados todos entre ellos, proporcionando una rigidez infinita, generando partes indeformables, se les denomina trechos rígidos. Para ello el Sap-2000 posee la opción **EndOffset** que establece a partir de un porcentaje de la mitad del ancho del elemento los resultados que nos proporciona.

Diagrama Rígido de Piso:

En la idealización tridimensional es usual considerar las losas con rigidez infinita para la deformación en su propio plano, como también despreciar la rigidez de flexión en losas. Se dice entonces que el comportamiento se asimila a diafragmas. Para ello la idealización con lleva la discretización en elementos finitos. La implementación de estos conceptos en el simulador estructural con lleva la selección de los nodos de la losa y atribuirles una constricción tipo **Diafragma**.

Consideración Dinámica del Viento:

La gran geometría del puente en cuanto a sus dimensiones hace que el viento sea el principal factor de diseño, tomando en cuenta que altas velocidades del viento puede causar grandes daños, un ejemplo claro el puente Tacoma inaugurándose en 1940, siendo destruido 4 meses después por una tormenta moderada, de vientos de casi 68 kilómetros por hora. El puente de 1643 metros de largo, atrapaba el viento en lugar de dejarlo pasar, provocando que la estructura ondulara como una “montaña rusa” colapsando el vano central.

La aerodinámica de los puentes nació tras el desplome del Tacoma, que enseña a los ingenieros que el viento no solo causa cargas estáticas en los puentes, sino que también implica acciones dinámicas.

Esta consideración dinámica del viento se resuelve con el software Sap-2000 bajo el influjo de la opción **Time History Function** donde se refleja la variación del impacto del aire en forma de fuerzas en los nudos a través del tiempo. Para ello se hace indispensable la creación de un estado de carga que sirva de multiplicador de las fuerzas que se definieron en el **Time History Function**. Cave acotar que los periodos de suceso del evento (ráfaga de viento) no deberán coincidir con el periodo propio de la estructura, esto llevaría al colapso de la estructura para alcanzar resonancia.

Conociendo que la simulación de acción del efecto de viento en puentes colgantes, se hace real y aproximada, construyendo a escala el puente sometiendo a grandes velocidades de viento, túnel de viento. Observando así los desplazamientos.

CONFIGURACIÓN.

Al principio, la idea del puente atirantado, fue el uso del cable atirantado para reemplazar las pilas como soportes intermedios para la viga con esto se podía tener vanos de gran luz.

El comportamiento de una viga soportada por el cable atirantado puede ser simulado aproximadamente como una viga sobre apoyos elásticos. El momento de flexión en la viga por una carga específica puede considerarse como una componente local y una componente global.

Los recientes diseños adoptan espacimientos pequeños entre cables. Es usual el requerimiento de que un cable puede destensionarse, desmantelarse y ser reemplazado bajo una reducida carga de tráfico. El momento adicional de flexión en la viga no se incrementa excesivamente si el espacimiento del cable es pequeño.

La complejidad de análisis se incrementa con el incremento del número de cables pero al computadora es la mejor herramienta para resolver el problema.

Las configuraciones de cables pueden ser en arpa, en abanico o radial, la configuración de los cables no tiene mayor efecto sobre el comportamiento del puente.

Cables

Los cables en un puente atirantado todos son inclinados. La rigidez real de un cable inclinado varía con la inclinación del ángulo, el peso total del cable y de la fuerza de tensión del cable del mismo, la configuración que se asigno al presente proyecto es de abanico disponiendo los cables cada 10m. en el tablero, salvando una luz total de 800m.

Viga

Los puentes atirantados han tenido dos mayores desarrollos la construcción vaciado en sitio y el prefabricado, el principio se utilizaron vigas cajón, luego se han ejecutado con secciones simples, tanto técnica y económicamente son factibles. También se utilizan tableros de puentes ortotropicos con losa de hormigón y vigas de acero.

Para el presente proyecto se recurrió al uso de una viga de sección cajón, promocionando con esta sección un paso libre a la acción de viento.

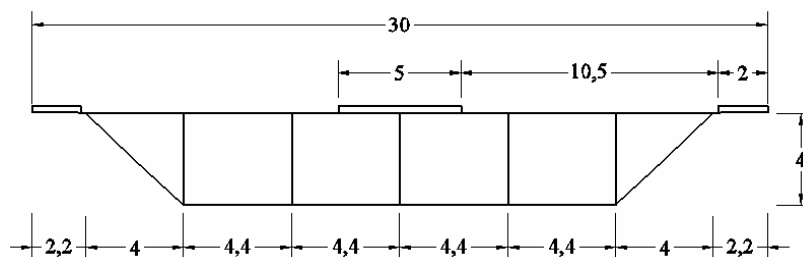


Figura Sección del puente con dos calzadas cada uno con tres vías de tráfico y tres vías para peatones (dos laterales y uno central)

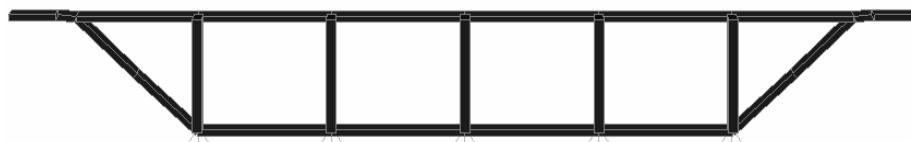


Figura Idealización de sección del puente con elementos shell

Torres

Las torres son los elementos mas visibles de puentes atirantados, por lo cual las consideraciones estéticas en el diseño son muy importantes. Porque el enorme tamaño de la

estructura hace preferible una clave y simple configuración; las torres son de concreto, porque la torre es un miembro a compresión los anclajes de los cables en la parte alta de la torres pueden ser de 3 tipos cruzado, anclaje muerto y cojinete.

Se adopto una única torre de apoyo por cada tramo de sección rectangular hueca y unos anclajes muertos.

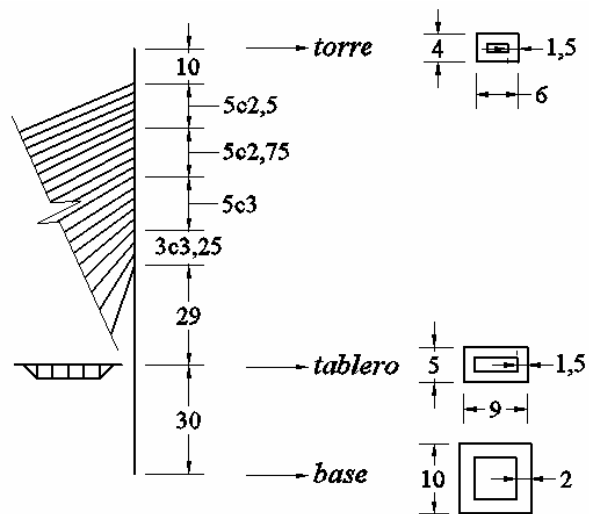


Figura Geometría de la torre elevación - seccion

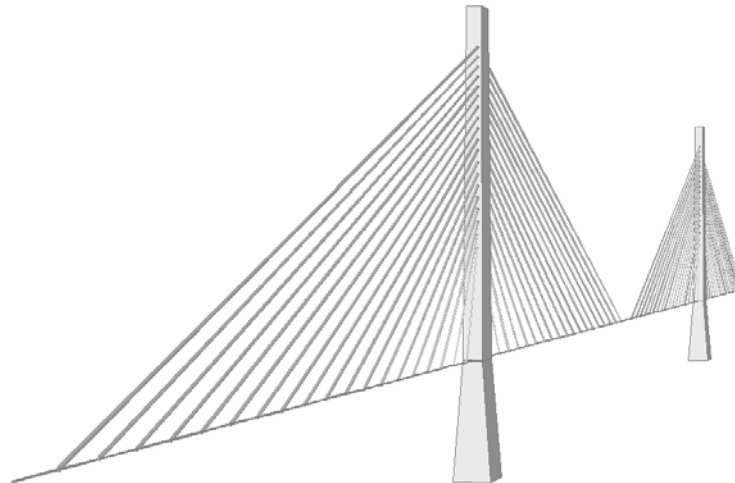


Figura Modelación de la torre con elemento frame de sección variable

DETERMINACIÓN DE CARGAS.

Antecedentes: Esta etapa del proyecto esta destinada a definir las distintas acciones y sus magnitudes de las mismas que por cierto recaerán en los distintos elementos estructurales. Como es proceder deberemos generar un modelo estructural del puente que simulara los elementos estructurales llámense vigas, Torres, riostres, cables, fundaciones, etc. Estos elementos serán sustituidos por barras o nodos que por su carácter unidimensional solo soportaran cargas lineales o puntuales. Por tal causa las cargas que en la realidad se comporten de diferente manera a esta (lineal o puntual), deberemos equipararlas con cargas de ese tipo tratando de que los efectos sean casi similares.

Análisis de Cargas: las acciones son asumidas como fuerzas concentradas y distribuidas o deformaciones indispuertas o impedidas que son aplicadas sobre la estructura De acuerdo a la forma de aplicación, se tienen acciones directas e indirectas, las primeras se dividen en permanentes, variables y extraordinarias y las indirectas en reológicas, térmicas, movimientos impuestos o acciones de viento.

En el presente estudio solo consideraremos las acciones directas permanentes (Carga muerta) y variables (Carga viva o móviles), temperatura y viento.

Acciones permanentes o cargas muertas (CM). Este tipo de cargas se denominan como permanentes por el hecho de que actúan en toda circunstancia ya que constituyen la misma estructura, estas pueden ser:

- Peso propio de los elementos estructurales: Peso de torres, vigas rigidizantes, riostres, losas.
- Peso propio de unidades constructivas: cables y pendolones.
- Peso de instalaciones fijas, etc.
- Acciones variables o cargas vivas (CV móviles).

Se diferencian de las anteriores porque su accionar es aleatorio en el tiempo. De igual forma pueden constituirse de forma concentrada o distribuida. Entre las más importantes, se tienen las siguientes Acciones:

- Acciones variables: Peso de las personas, peso de automóviles, vehículos, etc.
- Acciones climáticas, Temperatura que varían con la acción del viento, lluvia, nieve, etc.
- Acciones del terreno, se deben a su peso y fuerzas de empuje del terreno.
- Acciones variables debidas al proceso de construcción.

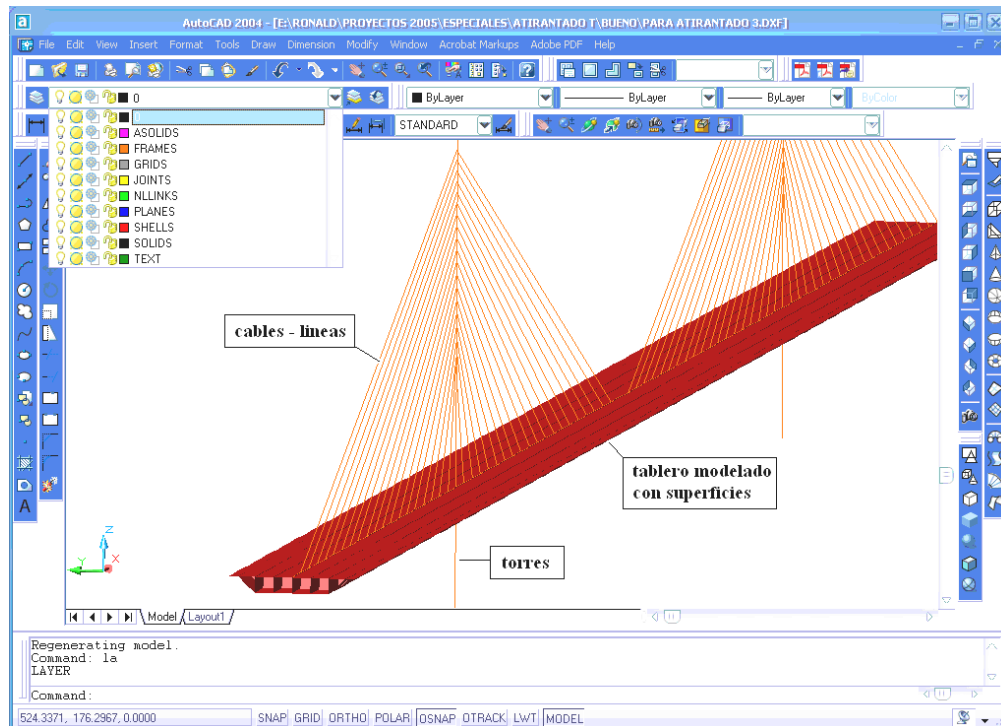
SIMULACIÓN ESTRUCTURAL.

La simulación estructural se lo realiza con la ayuda del software SAP-2000. v.10., Autocad-2004 en la generación de la geometría del puente.

Geometría de la Estructura:

Las condicionantes de predimensionamiento del puente atirantado están mas bien basados en esfuerzos que se desean obtener y en relación a el tipo de configuración que se desee, el ángulo que existe entre el tablero y el tirante mas inclinado debe tener una aproximación mayor a los 18° proporcionando inclinaciones menores esfuerzos de compresión desfavorables en el tablero, la altura de la plataforma hacia la cota de fundación se conoce haciendo estudios, tanto de suelos como estudios hidrológicos, y la altura de la mas grande de embarcación actual, siendo los puentes atirantados mas utilizados para salvar grandes luces, pero a la vez no entrar en el rango de los puentes colgantes. La AASHTO-LRFD en su manual de diseño de puentes recomienda la utilización de puentes atirantados en un rango de 600 a 1200 pies (180 a 360 metros) de longitud de tramo, el presente proyecto tiene un tramo central de 400m. y dos tramos laterales de 200m. cada uno.

Dibujando la geometría de los elementos estructurales del puente colgante y generando capas (layers) de trabajo, como se observa en la siguiente figura.



Guardando la geometría de la estructura en DXF se podrá importar del Autocad todos los elementos Sap.2000.

Cargando Una Estructura:

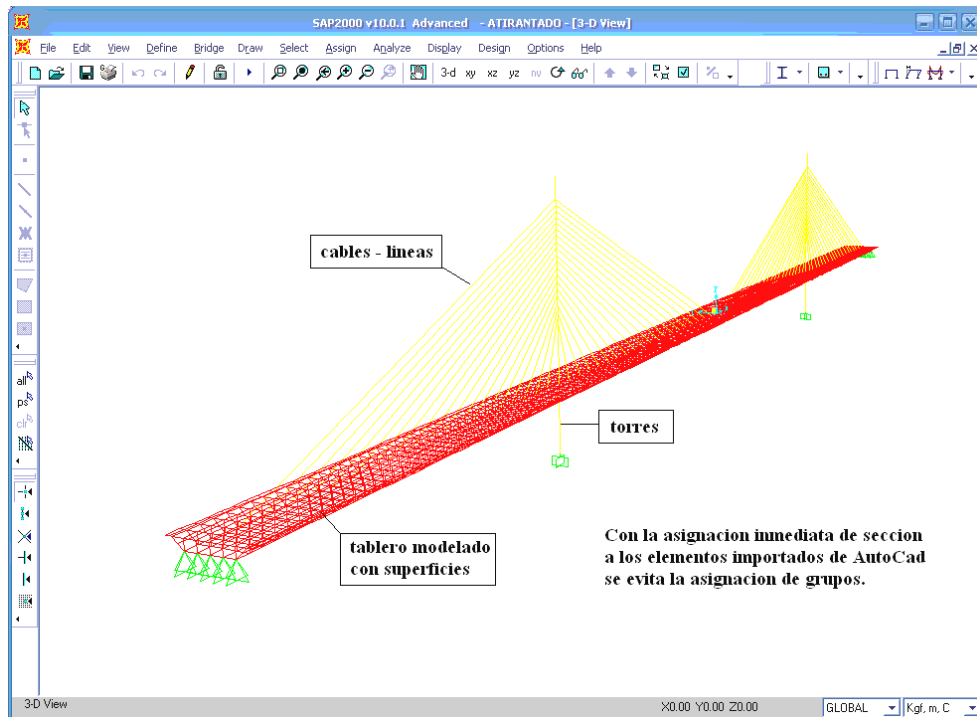
Este texto solo explica en forma macro el procedimiento de cargado de una estructura, por lo que se omitirá algunos pasos básicos en cuanto a la utilización de SAP-2000. No se explicara como generar frames o visualizar un momento, etc.

Importamos los elementos del Autocad (formato DXF), sabiendo que fueron dibujados en metros como mostramos a continuación.

Con File/ Import/ Autocad,dxf.file..., eligiendo las coordinas y las unidades de trabajo.

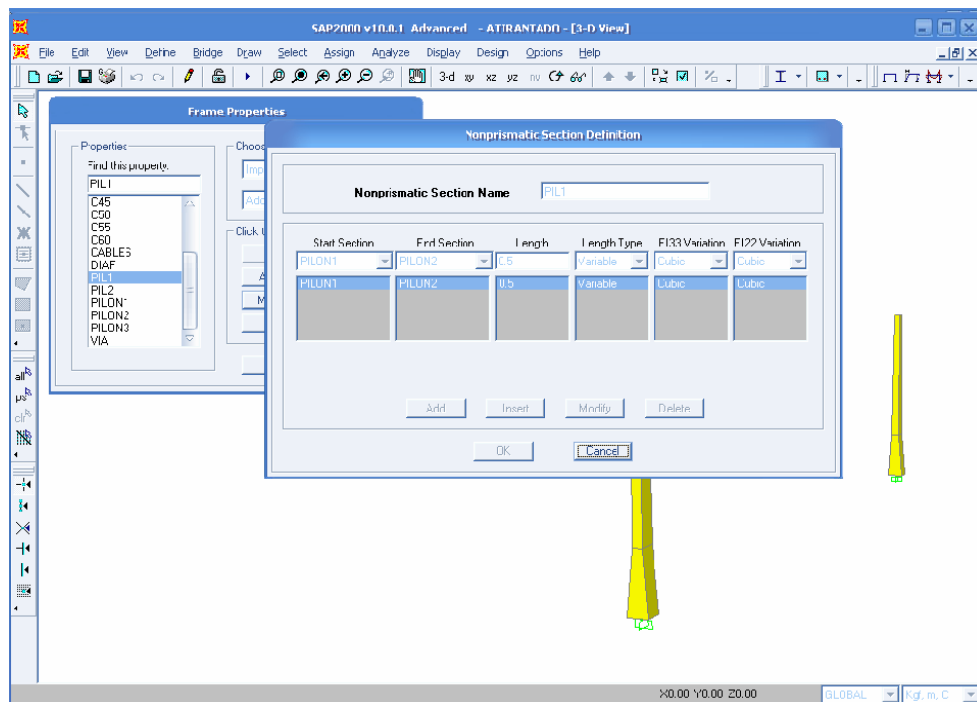
Elijiendo cuales serán Frame y Shells, debiendo generar grupos en cada importación para que cuando definamos los elementos y cargas sea mas fácil.

En la siguiente figura se muestra la. modelacion de puente con elementos frame y shell



Definimos las secciones a utilizar de las torres, serán de hormigón, variables en función a la altura desde 9x9 hasta 6x4 en la punta de la torre con un espesor mínimo de 1.5m.

Para la sección variable se utiliza Add Nonprismatic como se observa en la figura.



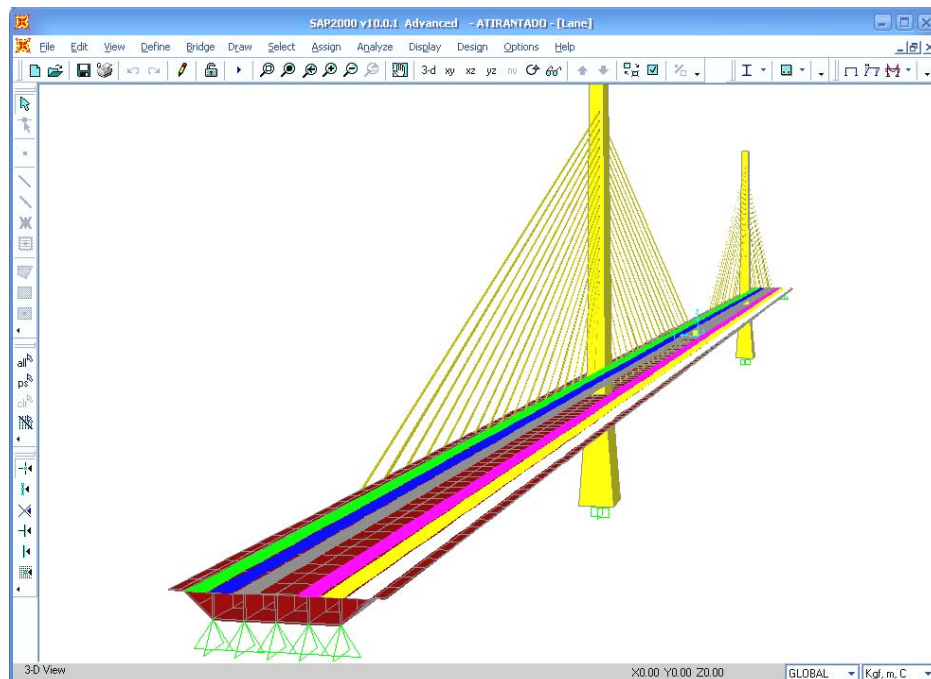
Definimos el espesor de la plataforma del puente, Creamos un rango entre los tirantes para que el programa nos de las secciones adecuadas para luego proceder, con la verificación de la sección, tomando en cuenta tanto cable como pendolón debe restringirse sus propiedades por que solo actúan a tracción y compresión, como se observa en la siguiente cuadro.

Property/Stiffness Modification Factors	
Property/Stiffness Modifiers for Analysis	
Cross-section (axial) Area	1
Shear Area in 2 direction	0
Shear Area in 3 direction	0
Torsional Constant	0
Moment of Inertia about 2 axis	0
Moment of Inertia about 3 axis	0
Mass	1
Weight	0

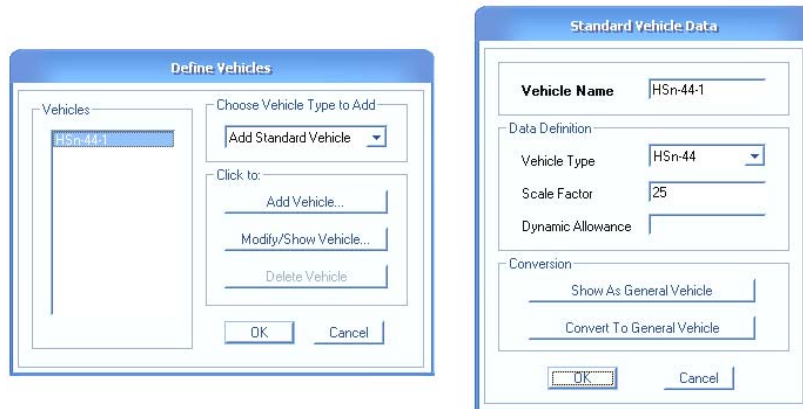
OK Cancel

La restricción en los apoyos de los extremos del puente son apoyos fijos, de la torres en las fundaciones es empotrado.

Cargas móviles se utilizara un tipo de camión el HS-25, el programa Sap2000 utiliza un elemento de la estructura como referencia. En la barra de herramientas existe una opción Bridge, en la cual tenemos los Lanes (líneas por donde pasaran el tren tipo del camión), Vehicles (seleccionando el tipo de vehiculo) y Vehicle Classes (donde se coloca el factor de mayoración de la carga por impacto), en el presente proyecto se utilizo tres vias de trafico y un 20% de factor de impacto.

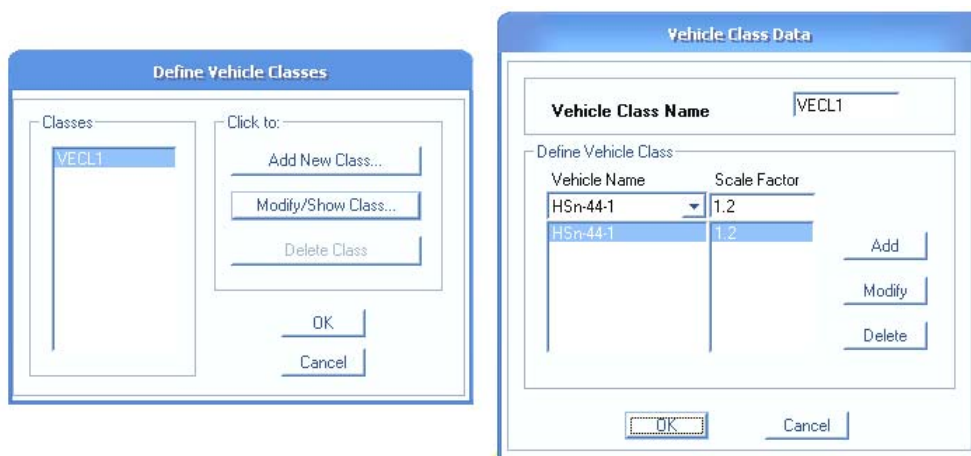


Definiendo el tipo de vehículo estándar:

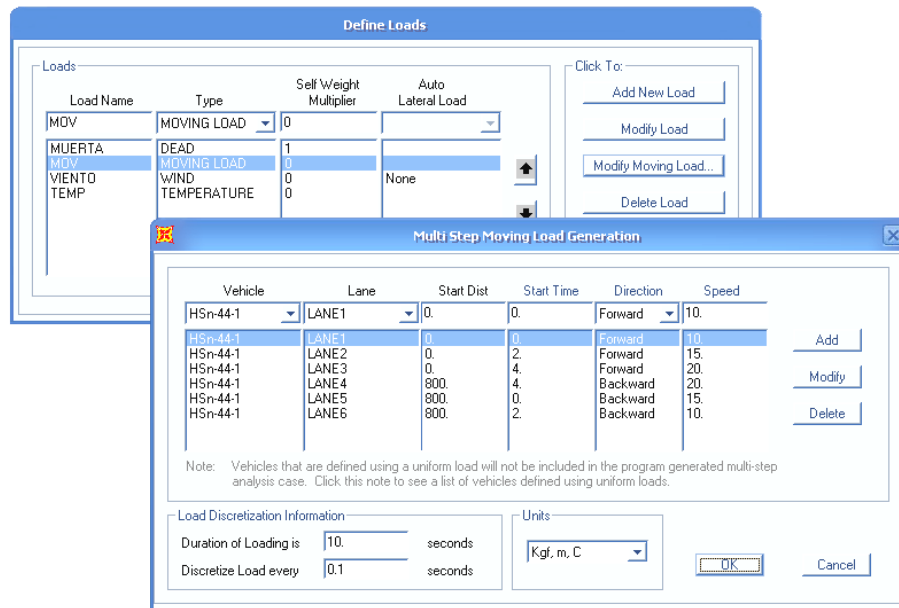


Donde modificamos el nombre del vehículo, el tipo de vehículo, y el factor de escala para que sea el camión HS25.

Colocando el factor de mayoración a la carga debido a la carga de impacto producida por el motor de vehículo:

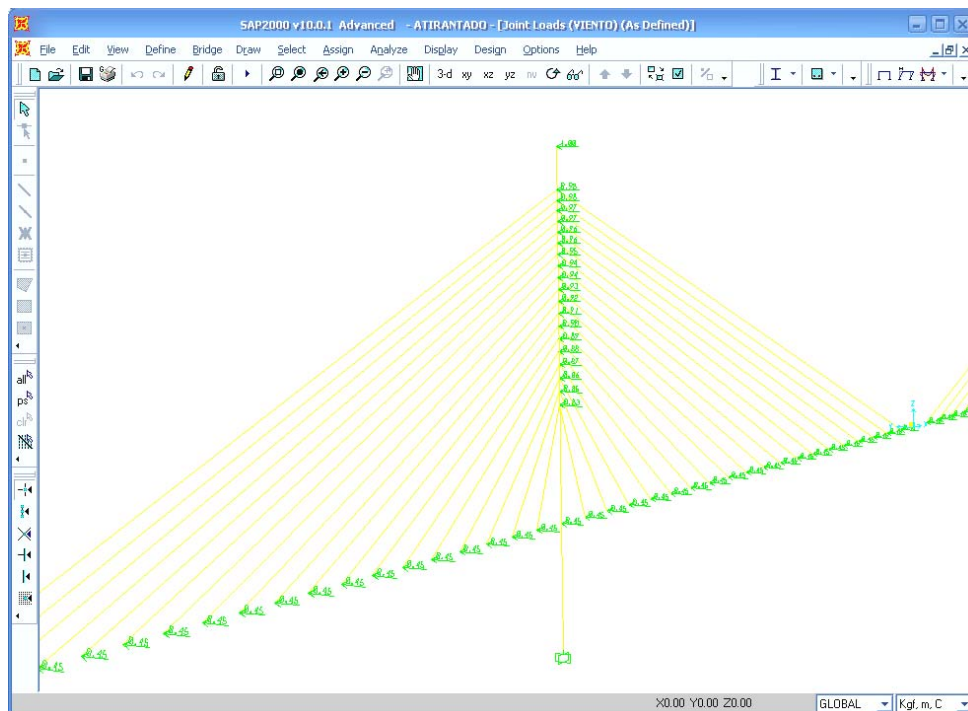


Definiendo el tipo de carga, colocando el vehículo, las líneas, la longitud total del puente, la dirección que lleva de ida o vuelta, y la velocidad de diseño que lleva, como se observa a continuación.

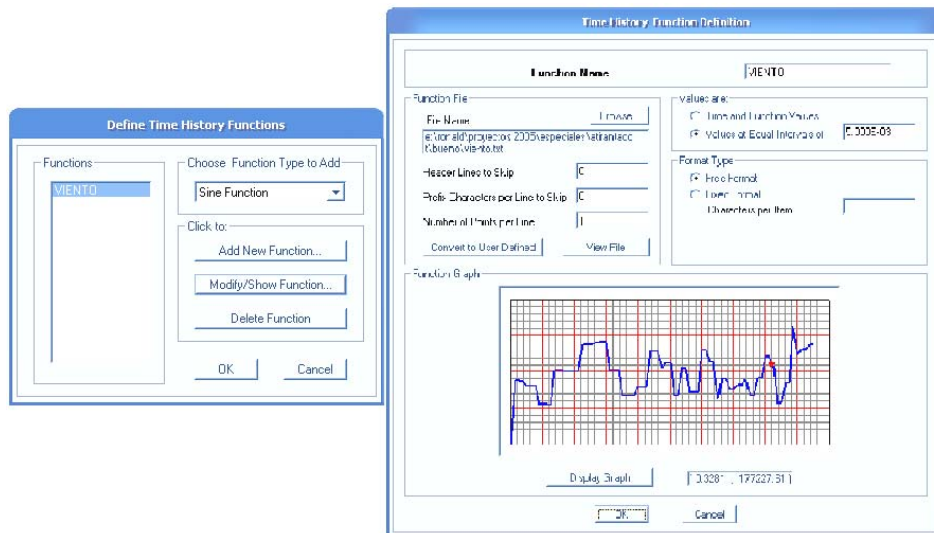



Los porcentajes de influencia respecto su altura desde la plataforma son cargados en la intersección de la torre y los tirantes, teniendo en cuenta que el viento influye directamente a la plataforma, siendo los cables y torres los que la sostienen.



Es decir que también se le debe cargar a la torres, como se observa a continuación.



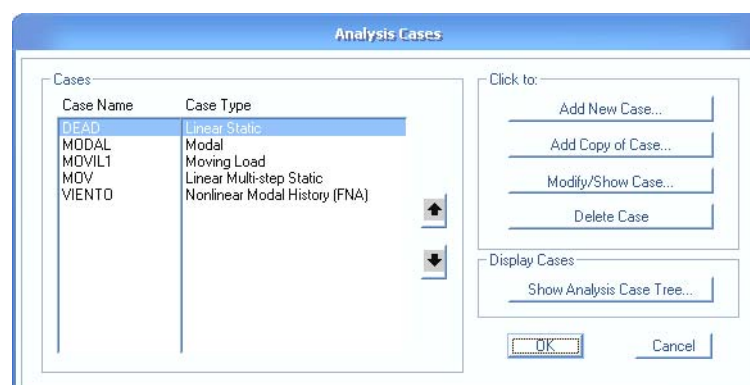
Definiendo el historigrama de viento, para luego colocar en el análisis de cargas.



Una vez definida las cargas y cargada la estructura antes de hacer correr, seleccionamos toda la estructura aplicamos el **trecho rígido**, ocultando todas las losas, seleccionando todo la estructura, Assign → Frame/Cable/Tendon → con  End (Length) Offsets..., desplegándonos una ventana en el cual seleccionamos automatic from connectivity y en el factor de rigidez colocamos **1** (Rigid-zone factor).

Para el **diagrama rígido de piso** mostramos las losas, seleccionando todas le asignamos un  → , desplegando una ventana seleccionando Diaphragm.

Definimos los análisis de las cargas como sigue.



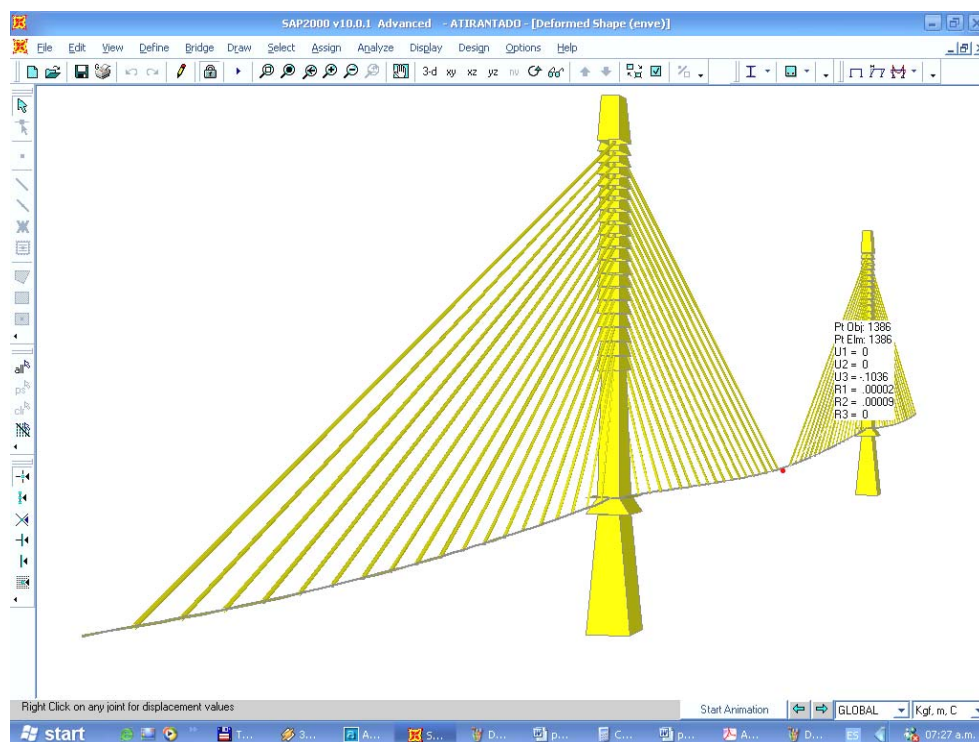
El programa Sap2000 analiza, verificando que no existan errores en el Monitor de análisis.

Para la sección ideal de las vigas rigidizantes, del menú Options seleccione Preferens y luego Steel Frame Design, desplegando el cuadro de dialogo Steel Frame Design Preferentes for AISC-ASD89. En este cuadro de dialogo verifique que AISC-ASD89 este seleccionado en el cuadro de listado Design Code.

Haciendo la primera iteración, del menú Design → seleccione Steel Frame Design y luego Stara Design/Check of Structure.

Cuando el control de diseño se completa, la relación de esfuerzos es desplegado, la segunda iteración Pulsando el botón Run Análisis, realizando luego como la primera iteración. Para luego colocar las secciones definitivas de diseño, Select All, del menú Design seleccione Steel Frame Design y luego Make Auto Select Section Null (para actualizar las secciones Auto del marco por la dimensiones de los perfiles escogidos) pulsando aceptar.

La comprobación de deformaciones es el ultimo paso a seguir verificando que estas sean aceptables si existiese el caso de grandes diferencias se debe cambiar la posición de las torres, separación de los tirantes o longitud de los tramos; es decir cambiar la geometría del puente.



Se puede re diseñar el puente observando los esfuerzos maximos y deformaciones maximas y los tramos desfavorables (zonas tensionadas, comprimidas en exeso), con la comprobación de desplazamientos se puede observar que la torre no sufre de deformaciones muy considerables en este caso para una envolvente deformaciones en la estructura principal

La simulación con Sap presenta la mayor deformación en el tramo central con un valor de 10 cm debido a que este tramo tiene una longitud de 20m entre ambos cables, esto se podría mejorar aplicando presesfuerzo a los elementos (efecto no considerado en la simulación).

Para finalizar podemos apreciar el efecto variable de la carga móvil (efecto dinámico de aplicación de carga), variando este en frecuencia y velocidad.

Los casos más desfavorables serian un grupo de camiones en el tramo central en ambas calzadas, de esta manera se podra diseñar los elementos con los esfuerzos conseguidos.

ANEXO D

GUÍA DE PROYECTO PRESA

INTRODUCCIÓN.

Se puede definir presa como una barrera artificial que se construye en algunos ríos para embalsarlos y retener su caudal. Los motivos principales para construir presas, son concentrar el agua del río en un sitio determinado, lo que permite generar electricidad, regular el agua y dirigirla hacia canales y sistemas de abastecimiento, aumentar la profundidad de los ríos para hacerlos navegables, controlar el caudal de agua durante los periodos de inundaciones y sequía, y crear pantanos para actividades recreativas. Muchas presas desempeñan varias de estas funciones.

Una presa debe ser impermeable; las filtraciones a través o por debajo de ella deben ser controladas al máximo para evitar la salida del agua y el deterioro de la propia estructura. Debe estar construida de forma que resista las fuerzas que se ejercen sobre ella. Estas fuerzas que los ingenieros deben tener en cuenta son: la gravedad (que empuja a la presa hacia abajo), la presión hidrostática (la fuerza que ejerce el agua contenida), la presión hidrostática en la base (que produce una fuerza vertical hacia arriba que reduce el peso de la presa), la fuerza que ejercería el agua si se helase (temperatura), y las tensiones de la tierra, incluyendo los efectos de los sismos. Y la relación de la resultante de la cimentación

Cuando se valora el mejor emplazamiento para construir una presa, el riesgo de terremotos forma parte del análisis geológico. Además, los geólogos deben determinar qué tipo de terreno está expuesto a filtraciones y cuál puede soportar el peso de la presa y el agua que contendrá detrás de ella.

La altura de la presa está limitada por la topografía de su emplazamiento, aunque otros factores pueden determinar una altura máxima menor. Si la función principal de la presa es la obtención de energía, la altura es un factor crítico, ya que la energía potencial del agua embalsada es mayor cuanto mayor es la altura a la que se encuentra. Si la presa es de contención, el factor más importante es la capacidad de almacenamiento. El volumen de agua embalsada es mayor cuanto más alta es la presa. Otros factores son la utilidad y el valor de las tierras que quedarán sumergidas, y si las aguas afectarán a importantes vías de comunicación.

Hay que evitar que el agua que se envía río abajo erosione la base de la presa. Para reducir la velocidad del agua se construyen unos embalses llamados cuencas amortiguadoras, que forman parte de la estructura de la presa. Existen dos tipos de estructura que se utilizan para disipar la energía destructiva que lleva el agua al caer. Uno es el que el flujo rápido y de poca profundidad que baja de la presa se convierte en un flujo profundo y lento al hacerlo pasar por una falda horizontal o poco inclinada de hormigón, construida río abajo desde la base de la presa. En el otro tipo la base de la presa tiene una forma que desvía el flujo, que baja a gran velocidad, hacia arriba y lo hace girar. Este giro disipa la energía destructiva del agua.

Las presas se clasifican según la forma de su estructura y los materiales empleados. Las grandes presas pueden ser de hormigón o de elementos sin trabar. Las presas de hormigón más comunes son de gravedad, de bóveda y de contrafuertes. Las presas de elementos sin trabar pueden ser de piedra o de tierra. También se construyen presas mixtas, por ejemplo de gravedad y de piedra, para conseguir mayor estabilidad. Además, una presa de tierra puede tener una estructura de gravedad de hormigón que soporte los aliviaderos. La elección del tipo de presa más adecuado para un emplazamiento concreto se determina mediante estudios de ingeniería y consideraciones económicas. El coste de cada tipo de presa depende de la disponibilidad en las cercanías de los materiales para su construcción y de las facilidades para su transporte. Muchas veces sólo las características del terreno determinan la elección del tipo de estructura.

Las presas de concreto son estructuras de dimensiones tales, que por su propio peso resisten las fuerzas que actúan en ellas. Si se construyen en cimentaciones buenas, las presas sólidas de concreto son estructuras permanentes que requieren poca conservación.

Las presas de gravedad son estructuras de hormigón de sección triangular; la base es ancha y se va estrechando hacia la parte superior; la cara que da al embalse es prácticamente vertical. Vistas desde arriba son rectas o de curva suave. La estabilidad de estas presas radica en su propio peso. Es el tipo de construcción más duradero y el que requiere menor mantenimiento. Su altura suele estar limitada por la resistencia del terreno. Debido a su peso las presas de gravedad de más de 20 m de altura se construyen sobre roca.

El aprovechamiento racional de los recursos hídricos llevó al hombre a determinar la gran importancia de las presas. Dado que entre los ciclos hidrológicos y las necesidades humanas no existe, generalmente, una total coincidencia, el hombre ha concebido las presas para neutralizar esta diferencia. El objetivo final de estas obras, las presas, son, sin duda, facilitar y propender al bienestar humano. Principales elementos que integran un aprovechamiento hídrico.

Donde los diferentes elementos que componen una presa son:

Presa: Muro que permite detener la corriente y almacenar el agua.

Embalse: Acopio de agua, en grandes volúmenes, que se forma en la cuenca aguas arriba de la presa.

Central: Lugar donde se genera la energía eléctrica.

Vertedero o aliviadero: Elemento que permite evacuar las crecidas extraordinarias, evitando mayores daños.

Descargador de fondo: Elemento evacuador que permite el vaciamiento parcial o total del embalse o para descargar sedimentos acumulados en el fondo.

Obra de toma: Permite el ingreso controlado del agua a la central para movilizar las turbinas.

Tuberías de presión: Tubos que conducen el agua desde la obra de toma hasta las turbinas dentro de la central.

Galerías: Túneles o galerías que recorren por dentro las presas.

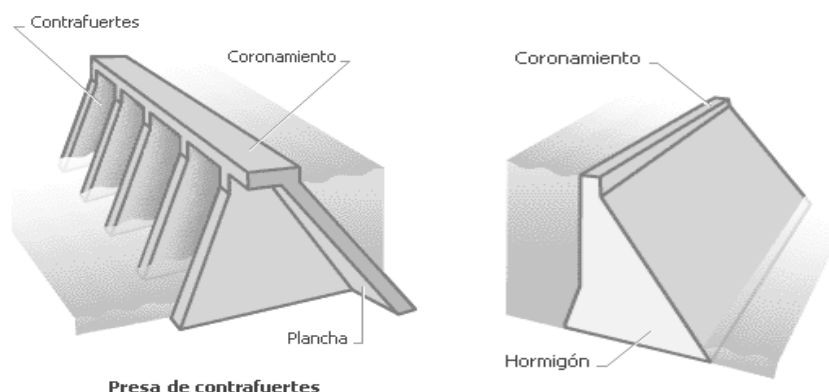
Estación transformadora y líneas de alta tensión: Elemento para elevar la tensión a los niveles requeridos y medio por el cual se transporta respectivamente.

Conociendo los siguientes tipos de presas comunes:

Presas de Bóveda: Este tipo de presa utiliza los fundamentos teóricos de la bóveda, la curvatura presenta una convexidad dirigida hacia el embalse, así la carga se distribuye por toda la presa hacia los extremos; las paredes de los estrechos valles y cañones donde se suele construir este tipo de presa. En condiciones favorables, esta estructura necesita menos hormigón que la de gravedad, pero es difícil encontrar emplazamientos donde se puedan construir.

Presas de Contrafuertes: Las presas de contrafuertes tienen una pared que soporta el agua y una serie de contrafuertes o pilares; de forma triangular, que sujetan la pared y transmiten la carga de agua a la base. Estas presas precisan de un 35% a un 50% del hormigón que necesitaría una de gravedad de tamaño similar. Hay varios tipos de presas de contrafuertes: los más comunes son de planchas uniformes y de bóvedas múltiples. En las de planchas uniformes el elemento que contiene el agua es un conjunto de planchas que cubren la superficie entre los contrafuertes. En las de bóvedas múltiples, éstas permiten que los contrafuertes estén más espaciados.

A pesar del ahorro de hormigón las presas de contrafuertes no son siempre más económicas que las de gravedad. El coste de las complicadas estructuras para forjar el hormigón y la instalación de refuerzos de acero suele equivaler al ahorro en materiales de construcción. Pero este tipo de presa es necesario en terrenos poco estables.



Presas Sobre Cimientos de Roca: La intensidad de la subpresión debajo de una presa de concreto sobre una cimentación de roca es difícil de determinar. Generalmente, se supone que las presiones intersticiales en la roca o en el concreto son efectivas sobre toda la base de la sección. Es evidente que bajo el efecto de una carga sostenida, la intensidad en la subpresión en el paramento de aguas arriba es igual a la presión total del vaso y varía en forma aproximada a la línea recta desde este punto a la presión del agua de descarga, o cero, en el paramento de aguas abajo, si no hay agua de descarga.

Las subpresiones pueden reducirse construyendo drenes a través del concreto de la presa y perforando agujeros de drenaje en la roca de la cimentación. Estos drenes se colocan generalmente en el paramento de aguas arriba de la cortina, aunque debe asegurarse que no se producirán tubificaciones directas del vaso. En todas las presas se construyen drenes de este tipo cuando son de altura considerable, y medidas reales de la subpresión tomada debajo de la presa. Si la roca fuera absolutamente homogénea se podría ver la eficacia de los drenes.

Sin embargo, por la presencia de hendiduras y fisuras y la incertidumbre de interceptarlas con los drenes, el procedimiento más seguro es suponer que la carga varía en línea recta hasta las presiones del agua de descarga como una medida de la subpresión.

Otros métodos que se usan para reducir la subpresión en el contacto de la presa con la cimentación incluyen la construcción de dentellones debajo del paramento aguas arriba, la construcción de canales de drenaje entre la presa y la cimentación y la inyección a presión de la cimentación.

Definiciones.

La terminología utilizada en el diseño y análisis de presas en arco no es universal en cuanto a significado. Para evitar ambigüedades, las descripciones serán definidas e ilustradas, estas definiciones serán usadas a lo largo de esta guía.

a. Arco (Arch Unit). Refiriéndose a una parte de la presa definido por dos planos horizontales. Arcos pueden ser de espesor uniforme o pueden ser designados de tal manera que su espesor sea variable en ambos lados del plano de referencia (arco de espesor variable).

b. Volado (Cantilever Unit). Es una porción de presa contenida entre dos planos radiales verticales.

c. Extrados - Intrados. La terminología mas comúnmente usada en referir las caras aguas arriba y aguas abajo de una presa en arco es el extrados e intrados. Extrados es la cara aguas arriba de el arco e intrados es la cara aguas debajo de los arcos. Estos términos son usados solo por unidades horizontales; las caras de los volados son referidos a aguas arriba y aguas abajo como apropiados.

d. Forma del terreno. Toda la forma del sitio es clasificado como estrecho-V, ancho-V, estrecho-U, o ancho-U como se muestra en la figura. Los términos ayudan también al diseñador a desarrollar conocimientos y/o experiencia con presas en otros sitios. Terminología común para los todos los sitios de presas en arco son la cresta relación longitud altura, CL:H. Asumiendo para comparación estos factores talque el ángulo central y la altura de la presa sean iguales, los arcos de presas diseñados en cañones anchos pueden ser mas flexibles en relación a la rigidez del volado que las presas en cañones estrechos, y proporcionalmente la parte mas grande de la carga se llevaría por acción del volado.

e. Relación altura – longitud de cresta. Puede ser usado como base de comparación con propósitos de diseño con condiciones existentes y otros factores como Angulo central, forma del perfil, tipo de trazado. La relación longitud altura también da una aproximación grosera de las limitantes económicas de la presa arco comparado con las presa de gravedad.

f. Simple Curvatura. Se refiere a una curvatura en un único plano. Sección vertical, o volado, teniendo una vertical o una cara de pendiente recta, o puede también ser con curvatura no definida limitada en relación al concreto abajo de este.

g. Doble Curvatura. La doble curvatura se refiere a que la presa es curvado en planta y elevación. Este tipo de presas se aprovecha el peso del concreto con mayor ventaja que las presas de simple curvatura. Consecuentemente, menos concreto en requerido resultando una presa mas eficiente y delgada.

h. Simetria. Adicionalmente a la forma del cañón previamente descrito, este puede ser simétrico o asimétrico. En general, los sitios no son absolutamente simétricos pero son considerados simétricos si la longitud del arco en cada cara difiere por menor de un cinco por ciento entre $0.15H$ y $0.85H$.

i. Simple Centro. Arcos con un único centro y espesor constante tienen el mismo centro describiendo el intrados y extrados lo que denota que los arcos son uniformes en espesor entre estribos. Arcos con un único centro y espesor variable tienen diferente centro describiendo el extrados e intrados, sin embargo, ambos son trazados en el mismo plano. Las líneas de centros no requiere que sean verticales pero deben ser coplanares con la corona del volado. Esta forma de arcos son apropiados para cañones estrechos, en aquellos sitios con una relación $cl:h$ menor que $3:1$.

j. Dos Centros. En arcos de dos centros, ambos planos son coplanares con la corona del volado. El plano de la izquierda contiene las líneas de los centros de el extrados e intrados necesarios para una forma apropiada, el lado izquierdo de los arcos es medido de la corona del volado al estribo. El plano de centros de la derecha contiene las líneas de centro del extrados e intrados para el lado derecho de los arcos.

Consideraciones

Relación Longitud - Altura. Tradicionalmente, muchas de las presas en arco están construidas en cañones, estos sitios con relación longitud altura son menores que 4 a 1. Aunque la gran ventaja económica puede ser alcanzada por una relación longitud altura menor de 4 a 1, sitios de gran relación pueden también necesitar grandes consideraciones.

Con el estado del arte en el diseño automatizado de presas en arco, es ahora posible obtener “diseños óptimos” para lugares que podrían ser considerados dificultosos en el pasado. Las presas en arco deben ser determinados considerando el sitio con relación longitud altura de menor o igual a 3. Para sitios que tienen relación longitud altura comprendida entre 3 a 6, la presa arco puede aún suministrar la mas factible estructura dependiendo en la extensión de excavación de fundación requerido para alcanzar un elemento adecuado. Para presas donde la relación longitud altura es mayor que 6 se debe tener un estudio cuidadoso que pueden ser desarrollados en función al requerimiento, disponibilidad de material, aliviaderos y controles de salida requeridos. El resultado de estos estudios darán a la presa en arco un a solución viable en la selección del ancho del sitio.

Metodología para el Análisis Estático

Datos de diseño Requeridos. los datos requeridos para un análisis estructural de una presa en arco de concreto son: modulo de Poisson, resistencia y elasticidad del concreto, modulo de Poisson y modulo de deformación de la fundación (roca), peso y coeficiente de expansión térmica del concreto, datos geométricos de la presa, datos geométricos de la abertura del aliviadero y los bloques de impulsión, operación del reservorio, area de la cuenca, variación de temperatura dentro de la presa, altura de sedimentación esperada, posibles cargas de hielo, y aumento de temperatura. La descripción de cada dato es como sigue:

a. Propiedades del hormigón. Las propiedades del hormigón a ser usadas en un análisis estático son influenciados por una mezcla de otros componentes, cemento, agregados, aditivos, y la edad del mismo. Estos datos no son disponibles de antemano y pueden ser estimados basados en experiencias obtenidas en proyectos similares y de un criterio personal; sin embargo. Los datos necesarios del concreto para el análisis son:

- Modulo de elasticidad
- Modulo de Poisson
- Peso específico
- Resistencia a la compresion
- Resistencia a la tension

- Coeficiente de expansión térmica

El modulo de elasticidad es a menudo es utilizado en el análisis de cargas estáticas como parámetro que sirve para verificar el efecto de deformación. En ausencia de pruebas a largo plazo, manteniendo un modulo de elasticidad entre 60 a 70 porciénto del modulo instantáneo pueden ser utilizados.

b. Propiedades de la fundación. Los datos de la fundación que son requeridos para un análisis estructural son el modulo de Poisson y el modulo de deformación de la roca que soporta la presa en arco. El modulo de deformación es definido como la relación de aplicación de esfuerzos para elasticidad e inelasticidad de esfuerzos e incluir estos efectos en los nudos, cortantes y fallas. El modulo de deformación es obtenido con ensayos insitu o pueden ser estimados del modulo de elasticidad de la roca utilizando factores de reducción. Si mas de un tipo de material esta presente en la fundación, el modulo de deformación efectivo puede ser utilizado en su lugar. Para fundaciones no homogéneas, varios valores de modulo de deformación pueden ser requeridos para definir adecuadamente las características de la fundación.

c. Cargas estáticas. Las cargas que contribuyen al diseño en un análisis seguro de una presa en arco son gravitacionales, agua almacenada, cambios de temperatura, sedimento, hielo, y carga de sismo. El propósito de esta sección es analizar todas las cargas estáticas a excepción de la carga de sismo que no será desarrollada en esta sección.

d. Cargas gravitacionales. Las cargas gravitacionales debido al peso del material son encontrados del peso por el peso unitario y la geometría del elemento finito. El peso muerto puede ser aplicado como a un volado libre y estático para simular el proceso constructivo o la estructura monolítica con todos los nudos inyectados. Aunque la primera asunción es usualmente mas apropiado, la combinación de estas dos es mas real en situaciones donde la curva vertical de como volado están pronunciada, esto es necesario para limitar la altura del volado libre y estático por inyección en la parte baja de la presa. El peso perteneciente a la estructura no será modelado como parte del elemento finito pero será soportado por la presa, si es muy significativo, serán introducidos como una carga concentrada y aplicada al soporte nodal de puntos.

e. Deposito de agua. Varios programas de elementos finitos como GDAP y SAP2000 sostienen cargas hidrostáticas como una capa de cargas distribuidas. La superficie de cargas son entonces aplicadas a la estructura como cargas concentradas nodalmente. Por consiguiente, hidrostáticamente la variación de presión en la superficie puede ser especificada por las propiedades del fluido, peso y densidad.

f. Temperatura. Los datos de temperatura en un análisis estructural resulta de la diferencia de la temperatura de cierre y la temperatura esperada del concreto durante esta operación. Los cambios de temperatura pueden presentarse por varias condiciones, usualmente varia: por la elevación a lo largo del arco, dirección aguas arriba y aguas abajo. Esta distribución de temperatura en el concreto es determinado por estudios de temperatura considerando efectos de ráfagas temporales de temperatura tanto de aire como de agua, fluctuación de nivel del reservorio, y radiación solar. La distribución no lineal de temperatura calculado en estos estudios es aproximadamente distribuido a través del espesor de la presa para el desarrollo de un análisis estructural usando elementos cáscara. Sin embargo, si se usan varios elementos sólidos a través del espesor, la distribución de temperatura no lineal puede ser aproximada.

g. Limo. Las presas amenudo están sujetas a presión de limo debido a la sedimentación de materiales depositados en el reservorio. La carga de limo saturado es tratado como una variación hidrostática de presión actuando en al cara aguas arriba de la presa en el fondo de la cuenca. El nivel de limo y el peso, densidad equivalente del mismo es requerido para especificar la presión del limo.

h. hielo. La presión de hielo puede ser una carga significativa en la presa si esta ubicada en lugares elevados y pueden ser consideradas como cargas de diseño cuando la cobertura de hielo es de espesor considerable. La presión de hielo existente es muy dificultoso de estimar porque este depende de varios parámetros que son fácilmente de hallar.

Método de Análisis. El análisis estático de presas pueden ser basada en 3-D FEM. El FEM es capaz de representar un comportamiento en 3-D del sistema presa-fundación y puede sostener cualquier geometría arbitraria de forma variable de la presa. Además el

método puede encontrar variación de cargas, es también aplicable a presas de gravedad y es tan bueno como los elementos esbeltos y doblemente curvados.

El método de elementos finitos es esencial en condiciones como presas en arco, es aproximadamente armados por elementos interconectados solo en un numero finito de nodos teniendo un numero finito de incógnitas. Aunque existen varias formulaciones en los elementos finitos hoy en día, solo aquellos basados en los desplazamientos que es la base de al menos la mayor parte de los programas prácticos. Siguiendo los lineamientos de los elementos finitos el análisis computacional para cargas estáticas tiene la siguiente secuencia de pasos analíticos:

- Dividir la estructura de la presa y la roca de fundación en un numero apropiado de subregiones discretas (elementos finitos) conectados a nudos llamados puntos nodales.
- Calcular la matriz de rigidez para cada elemento individual acorde a los grados de libertad y al efecto fuerza-desplazamiento relacionado al elemento definido.
- Añadir las matrices de rigidez individuales de los elementos a la matriz de rigidez general de la estructura completa (método de rigidez directo).
- Definir las condiciones de contorno apropiadas y establecer las condiciones de equilibrio en los puntos nodales. Defina que el límite apropiado condiciona y establece las condiciones de equilibrio a los puntos nodales.
- Resolver el sistema de ecuaciones para la incógnita de desplazamientos nodales.
- Calcular los esfuerzos en los elementos de la relación entre la deformación y desplazamiento asumiendo una relación esfuerzo deformación elástica.

Modelación Estructural. Las presas en arco son un sistema 3-D que consiste en un arco de concreto soportado por una fundación de roca flexible y alberga un reservorio de agua. Uno de los mas importantes requerimientos en el análisis de presas en arco es el desarrollo del modelo representativo del comportamiento de todo el sistema. A continuación presentáramos los lineamientos generales en la modelación para un análisis lineal elástico estático de una presa de simple curvatura. Los lineamientos tienen como meta suministrar una razonable relación entre exactitud y costos. Los procedimientos y

lineamientos para desarrollar modelos matemáticos de varios componentes de presas en arco son como sigue:

a. Modelo de la presa. Una malla apropiada de elementos finitos para una presa en arco puede solo ser logrado por consideraciones cuidadosas de la geometría de la presa. Por ejemplo, el modelo de elemento finito para una doble curvatura espesor de cascara estructuralmente difiere del modelo de espesor de sección de un arco de gravedad. Además, el modelo estructural desarrollado solamente para un análisis estático lineal generalmente no es apropiado para una análisis no lineal.

b. Numero de capas de elementos sólidos. Las presas en arco pueden ser divididos, de acuerdo a la geometría de su sección, espesor interno, espesor medio, y sección del arco en gravedad. La tabla mostrada a continuación nos indica cada uno de estos parámetros en consideración al espesor de la cresta (t_c) y el espesor de la base (t_b), cada expresión en relación a la altura (H). también se puede ver la relación espesor base cresta. En general los elementos sólidos pueden de 8 a 21 nodos, pueden utilizarse también, pero estos no son exactos como el uso de elementos shell en representación de momentos de alabeo y deformación por cortante de una estructura de cascara delgada. En ambos casos, una capa simple de elemento solido cuyo desplazamiento cuadrático e interpolación geométrica de la fundación en dirección de la cara de la presa en interpolación lineal en dirección del espesor de la presa es suficientemente exacto para representar el cuerpo de la presa.

c. Tamaño de la malla. No hay ninguna regla establecida para seleccionar un tamaño de la malla óptimo por subdividir una presa en las direcciones de la superficie. El acercamiento mas aproximado es sin embargo, definir y analizar varias mallas de tipos del elemento diferentes y tamaños, entonces seleccionar el que es de manera computable mas eficaz y proporciona los resultados con exactitud. Los factores principales para considerar la selección de la malla incluyen el tamaño y geometría de la presa, tipo de elementos a ser usados, tipo y situación de vertedero, el perfil de la fundación, así como las características dinámicas de la presa, y el número de modos de vibración requirió en el análisis del terremoto. El tamaño de los elementos finitos, deben seleccionarse para que la malla iguale

la geometría global, el espesor, y la curvatura de las estructuras de la presa con precisión. Cuando la curvatura de la presa aumenta, se necesitan los elementos más pequeños para representar la geometría. Los tipos de elementos que modelan una presa no sólo afectan el tamaño de la malla requerida sino que influyen grandemente los resultados. Por ejemplo, la idealización de presas de cara plana requiere el uso de elementos más pequeños y así, un número más grande de ellos, tales elementos no pueden reproducir la deformación por cortante transversal a través de la presa los cuales no pueden ser despreciados.

Evaluación Resultados.

La evaluación de los resultados de esfuerzos debe empezar con la examinación cuidadoso de la respuesta de la presa para asegurar la validez de estos. Los desplazamientos nodales y esfuerzos debidos a las cargas individuales son los datos más apropiados para este propósito. En particular, los desplazamientos y esfuerzos a lo largo del arco superior y la corona del volado son sumamente útiles. Se inspeccionan los datos para cualquier distribución inusual y magnitudes que no pueden explicarse por intuición y qué difieren significativamente de los resultados para presas en arco similares. Una vez que los resultados analizados sean aceptables, el desarrollo de la presa por las combinaciones de cargas presentadas será evaluado.

Esta segunda fase de evaluación involucra comparando las tensiones calculadas máximas con la fuerza especificada del hormigón según el criterio estableció anteriormente. El análisis debe incluir los efectos de cargas estáticas reales que actuarán en la estructura durante su funcionamiento, de acuerdo con las combinaciones de Carga. El valor más grande de tensión para cada caso de combinación de carga debe ser menor del valor que la fuerza de tensión del hormigón por los factores de seguridad especificados para cada combinación de carga. Cuando cumple todos los criterios de diseño y los factores de seguridad están en un rango aceptable, el diseño es considerado satisfactorio, o considerado seguro bajo las cargas estáticas.

Bajo las cargas estáticas, una pesa en arco bien diseñada debe desarrollar esfuerzos del compresión que sean menores a los esfuerzos admisibles del hormigón; sin embargo, pueden desarrollarse esfuerzos de tensión bajo las combinaciones de carga múltiples,

particularmente cuando la carga de temperatura es considerablemente grande y otras son desfavorables. Aunque el hormigón armado puede tolerar una cantidad limitada de tensión, es importante guardar la tensión a un mínimo para que el arco tenga una resistencia de reserva suficiente si es sometido a cargas sísmicas adicionales. Verticalmente los esfuerzos de tensión pueden ser minimizadas arqueando verticalmente y colgando la cresta, pero la cantidad que esto puede hacerse está limitada por esfuerzos y estabilidad del arco durante el proceso de construcción. Cuando los límites de diseño se alcanzan o, como en el caso de muchas presas existentes, cuando estas no se diseñan para las condiciones de cargas severas, un poco de agrietamiento podría ocurrir a la base y cerca de los estribos. Los análisis lineal-elásticos indican a menudo tensiones grandes cerca de la discontinuidad geométrica al contacto de la fundación. Sin embargo, es importante notar que los esfuerzos de tensión se presentan en la base de presas en arco, en el análisis lineal-elásticos es en parte ficticio porque estos análisis no tienen en cuenta la unión limitada entre el hormigón y roca de la fundación así como las juntas en la roca que podría abrirse cuando se sujete a fuerzas de tensión. En esta situación, una estimación más realista de esfuerzos estáticos a la base de la presa puede obtenerse por un análisis lineal-elástico que usa un módulo de deformación de fundación reducido para disminuir la tensión en la roca fracturada.

Las presas en arco tienen la particular de transferir cargas horizontales a la fundación. En general, por consiguiente se espera esfuerzos de compresión a lo largo de la presa; sin embargo, los análisis de presas en arco con los vertederos vacíos, o con los niveles de agua bajos, en condiciones de temperaturas bajas severas indican división de zonas en esfuerzos de tensión horizontales desarrolladas en las caras de la presa aguas arriba y río abajo. Estos esfuerzos de tensión combinados con tensiones adicionales debido a gradientes de temperatura tienden a abrir las juntas de reducción verticales que se espera que tenga pequeño o ninguna fuerza de tensión. Está claro que los junta abiertas releviran que cualquier esfuerzo de tensión en el arco, las cargas correspondientes pueden redistribuirse a la acción del volado tal que se concentren las tensiones a una porción pequeña de la presa.

Las tensiones de esquila ocasionalmente son un problema en una presa en arco; no obstante, estas deben verificarse para asegurarse que permanecen dentro de los límites aceptables.

En la conclusión, los resultados de un análisis elástico lineal son sólo válidos si el agrietamiento o aperturas de la junta que ocurren en la presa son menores y la rigidez total de la estructura no es significativamente afectada. Por consiguiente, es necesario evaluar la magnitud de las grietas y juzgar si algún estado de esfuerzo puede afectar la seguridad de la presa y su funcionamiento. Si el agrietamiento perceptible, es aceptable investigar su magnitud y sus efectos en los esfuerzos y deformaciones reales por procedimientos analíticos. Una investigación aproximada basada en un análisis no lineal simplificado puede hacerse eliminando las áreas de tensión por la iteración y reanalizando el arco.

ALCANCE DEL PROYECTO

Debido a las grandes proporciones de la estructura y para poder cumplir con todas las condiciones de contorno que nos permitan una simulación tridimensional lo mas cercana a la realidad, es necesario una análisis que considere a dicha estructura como un conjunto de elementos solidos.

Por ello se ha optado por realizar el análisis como elemento sólido en el paquete estructural **ANSYS v.10**, y solo para poder apreciar las ventajas y las diferencias de una simulación como cascara, que se hará una simulación también en **ANSYS v.10**. De modo que se puedan obtener deformaciones comparativas de ambos casos, mostrando la mas cercana a la realidad y la que cumple las limitaciones definidas por norma.

DATOS DEL PROYECTO.

El presente proyecto tiene como objetivo el diseño de una PRESA TIPO ARCO, CON DOS CENTROS Y DE DOBLE CURVATURA, y con las siguientes características:

Materiales

- Resistencia del hormigón $280 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
- Peso unitario del hormigón $2400 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
- Modulo de Elasticidad H° $300000 \text{ [kg/m}^2\text{]}$
- Coeficiente de Poisson H° 0.20
- Temperatura de 30°C y una Gravedad de 10 Kg/ cm^2

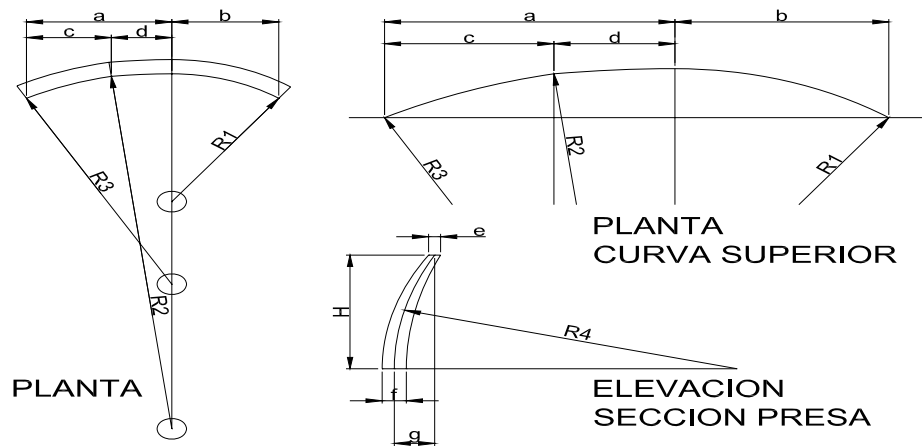
Geometría.

$$a = 55 \text{ [m]}$$

$$g = 10 \text{ [m]}$$

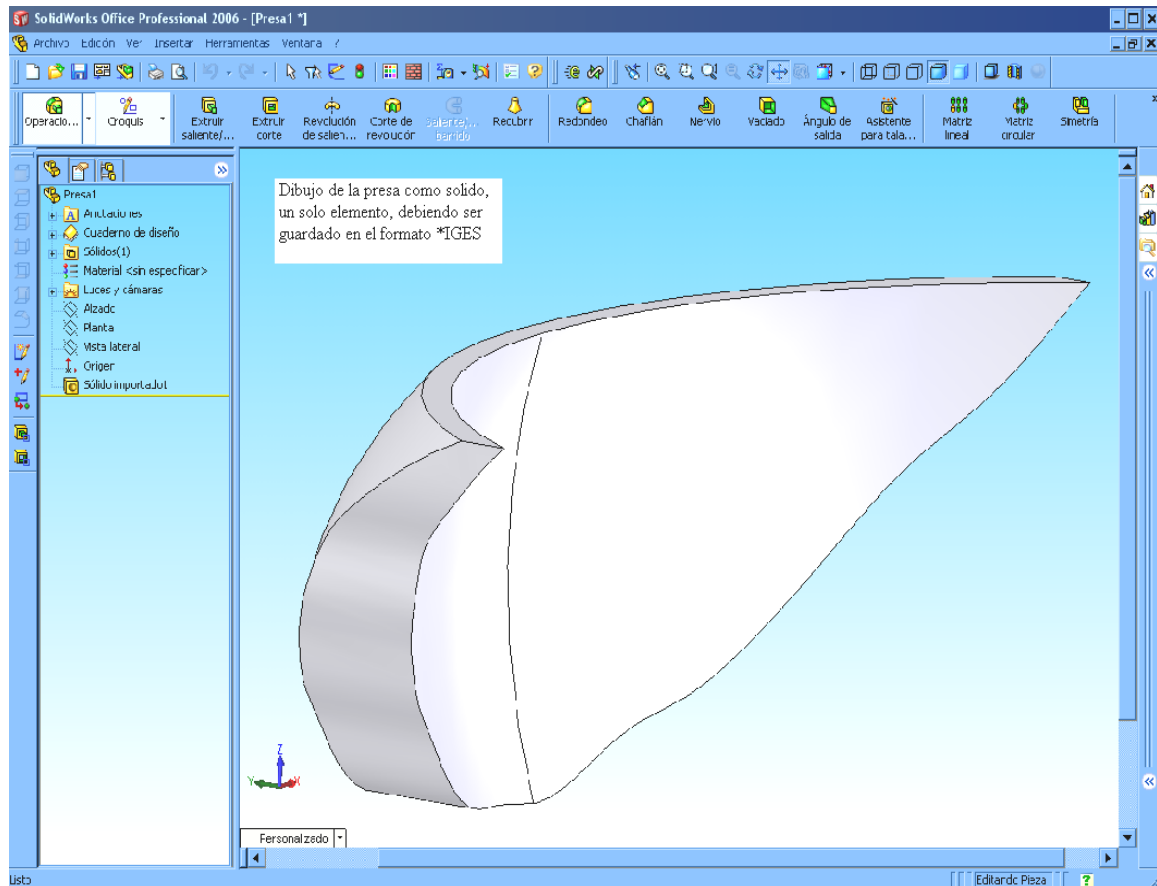
$$b = 65 \text{ [m]}$$

$$H = 40 \text{ [m]} \quad (\text{Altura})$$



SIMULACIÓN ESTRUCTURAL

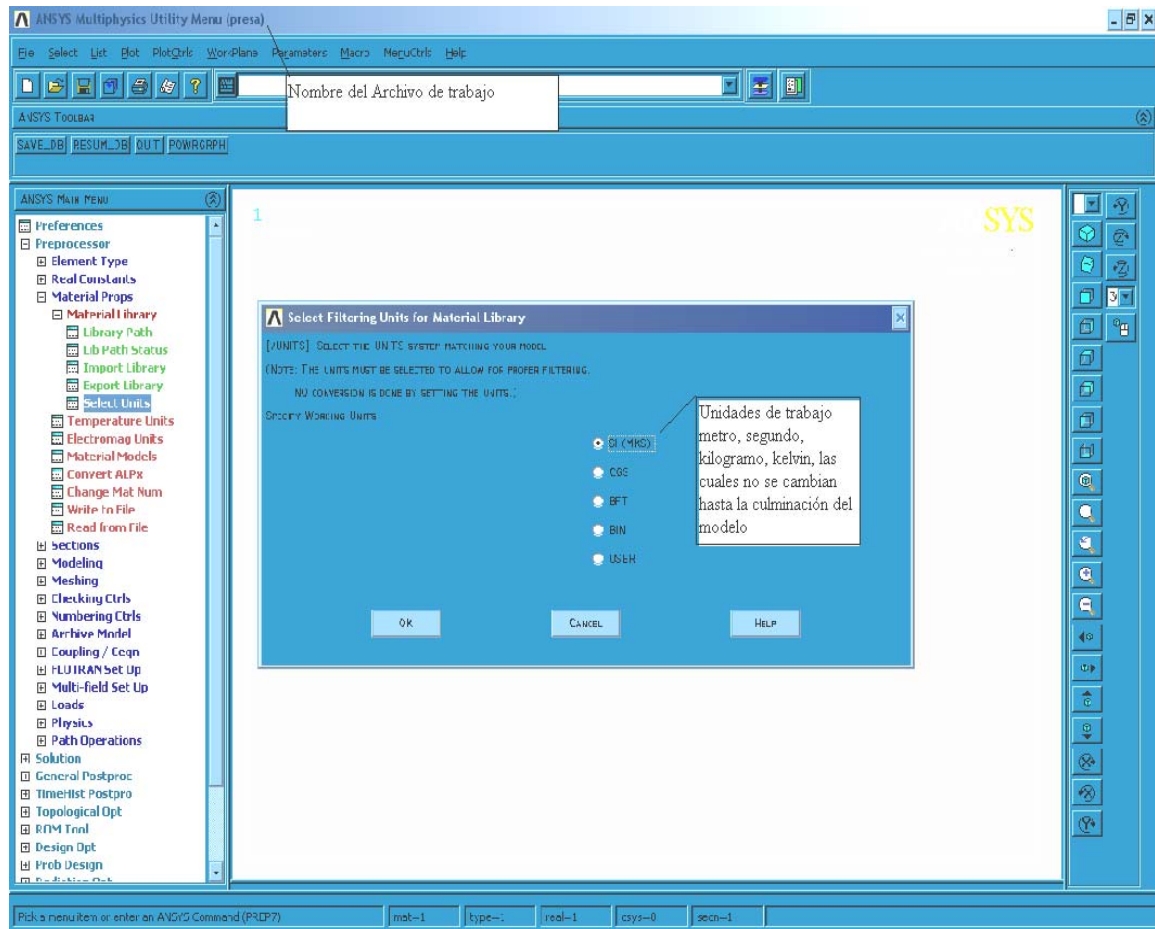
El programa Ansys permite la importación de estructuras dibujadas en solidWorks, para este proyecto se empleara la ayuda de silidWorks 2006; dibujando la estructura de la presa como un solido.



PASO 1:

Abriendo el programa Ansys v.10 creación de un modelo se define el nombre de trabajo ubicando la dirección donde se va a guardar File → Change Directiry..., dándole el nombre File → Change Jobname... y escogemos un modelo “estructural”, dentro de la pestaña de preferencias Preferentes → Estructural → Ok.

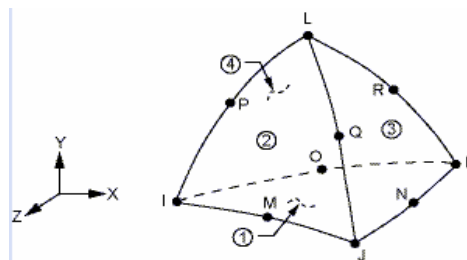
Debiendo seleccionar la unidades de trabajo, sistema internacional (International system), (SI or MKS; m, kg, s, K), en el menú principal; Preprocessor → Material Props → Material Library → Select Units.

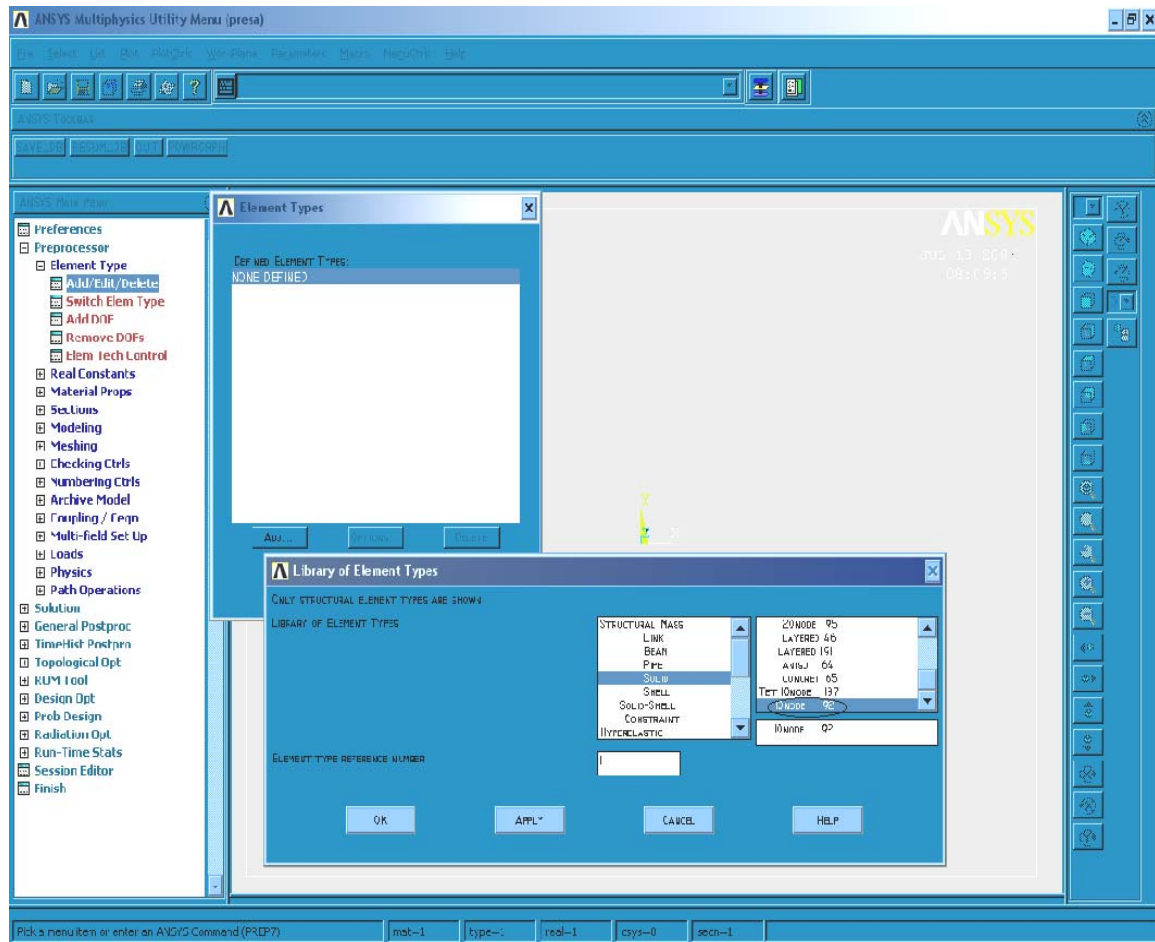


PASO 2:

Definición de materiales, es necesario definir el tipo de elemento estructural a emplear, Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Add, donde elegimos el Solido92, que tiene las propiedades mas adecuadas para esta simulación.

Solid92: el elemento se define por 10 nudos que tiene tres grados de libertad a cada nudo, también tiene plasticidad, siendo ideal para la modelación de sólidos en curvatura.

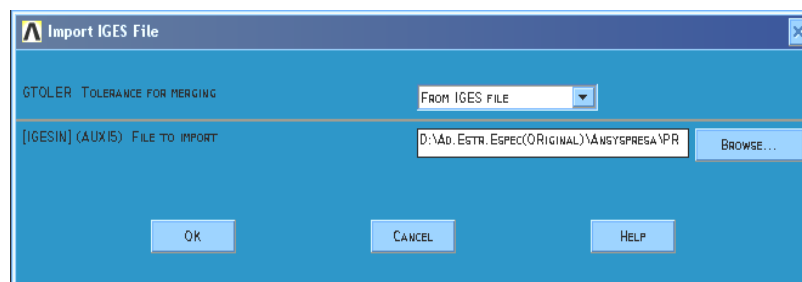




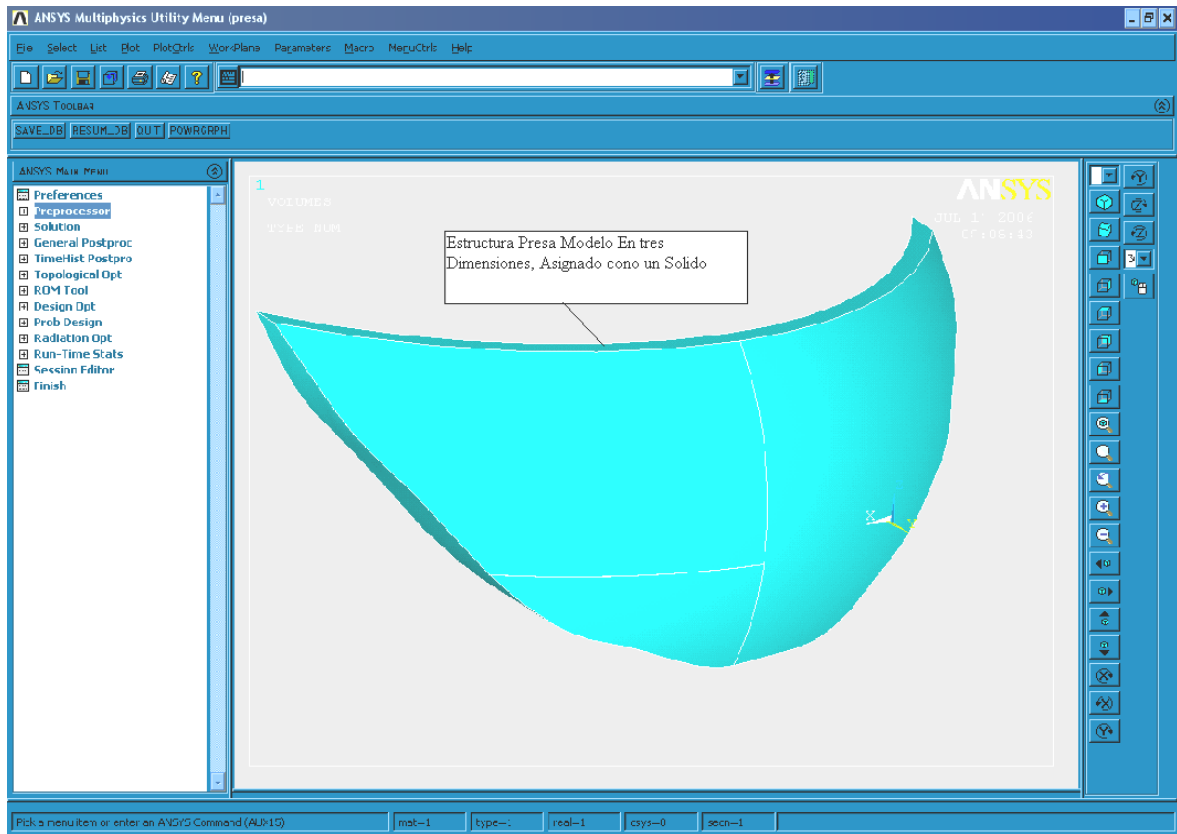
PASO 3:

La importación de la estructura en el formato guardado *.Iges. , será:

File → Import → IGES.... Mostrándonos una ventanilla de importación de archivos formato *.IGES. (buscando con Browse... el archivo guardado) asignamos Ok, desplegando otra ventanilla (Import Iges File) como se observa.



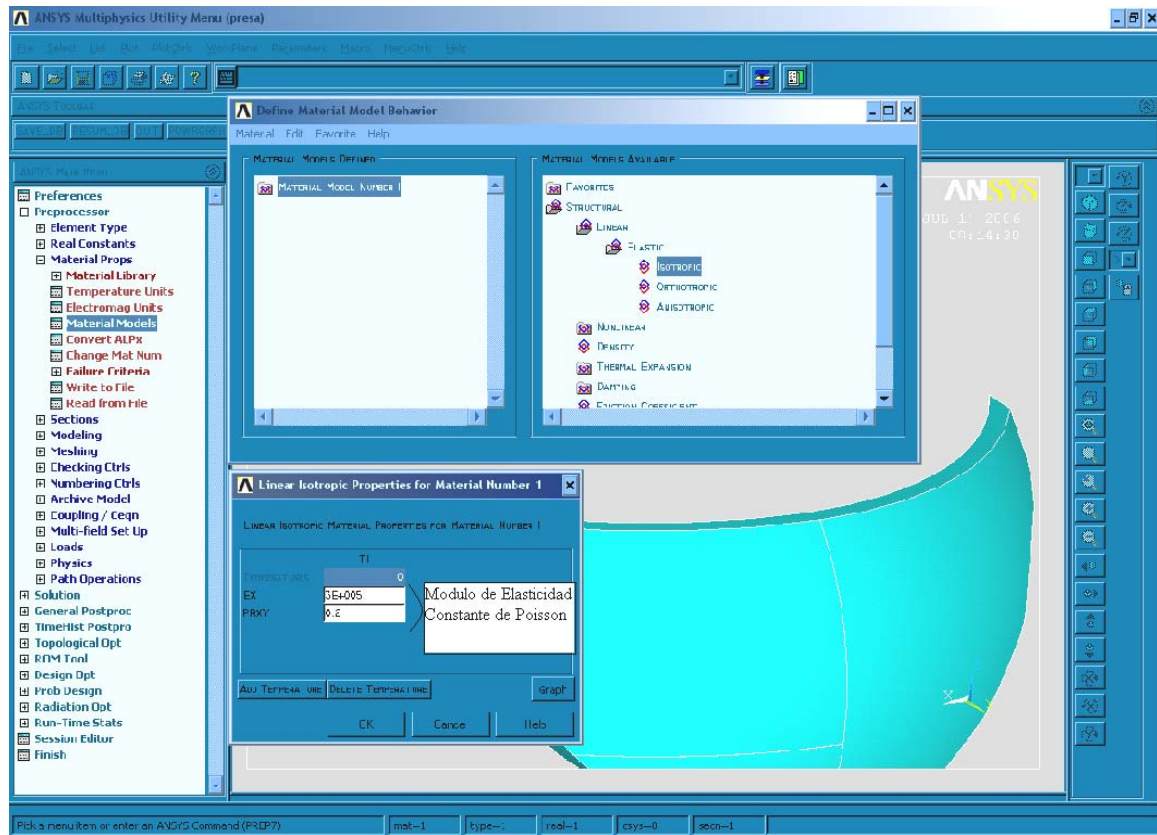
Haciendo OK, tenemos el modelo importado.



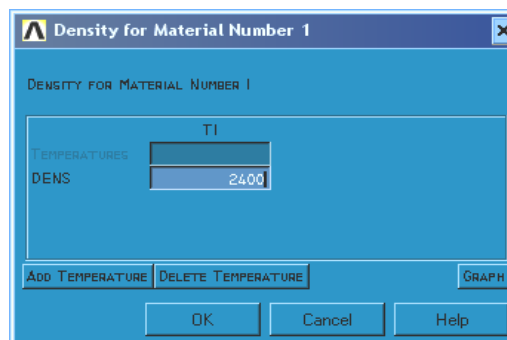
PASO 4:

Se debe definir el material del modelo, de la presa del menú principal.

Preprocessor → Material Props → Material Models, desplegándonos una pantalla (Define Material Model Behavior), haciendo clic en Structural → Linear → Elastic → Isotropic, donde cargamos el Modulo de elasticidad del material y la constante de Poisson, como se observa a continuación.



Además se debe colocar la densidad del material a emplear para la presa; luego salir de la opción.

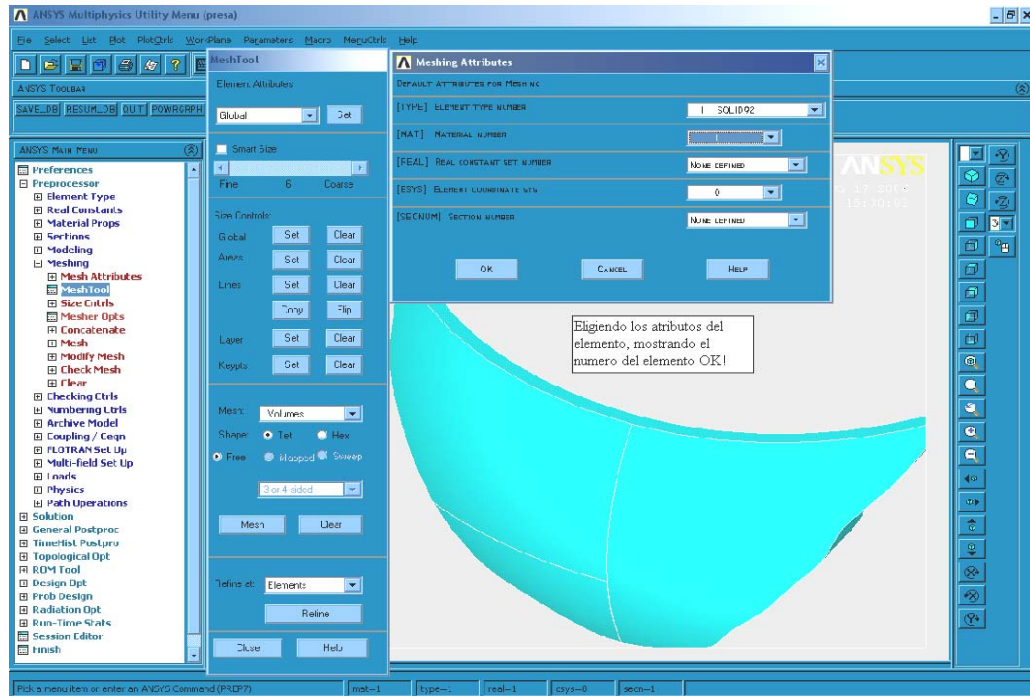


PASO 5:

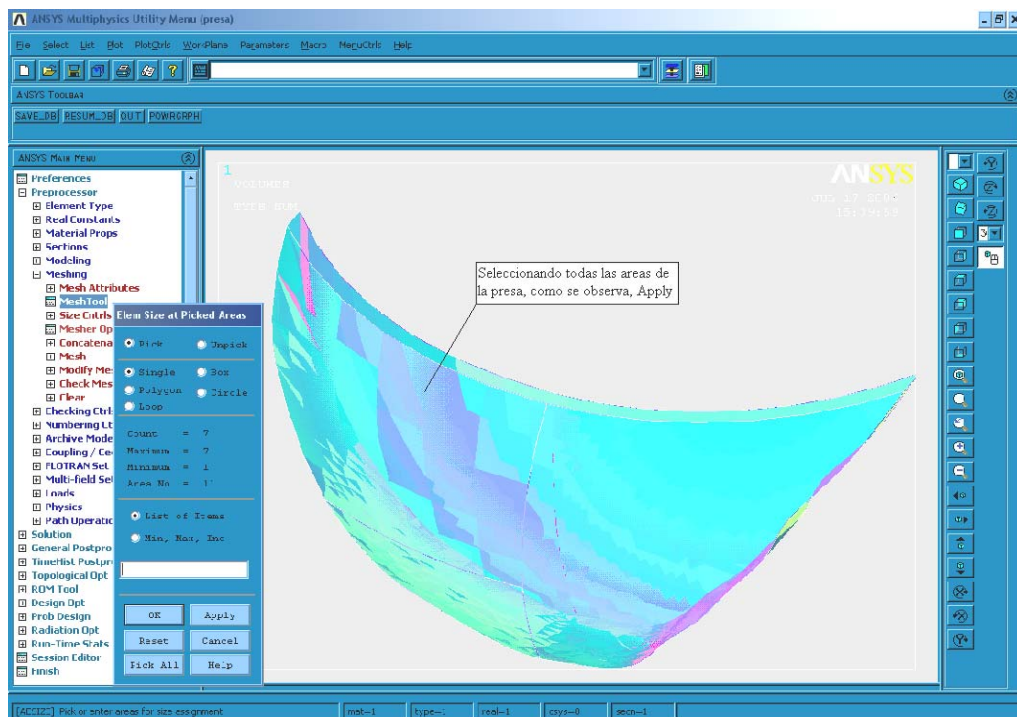
Proseguimos con la división en elementos finitos, nosotros usaremos una malla moderada, Clasificada según tamaño para esto; en el menú principal.

Preprocessor → Meshing → Mesh Tool, observando como sigue en el modelo.

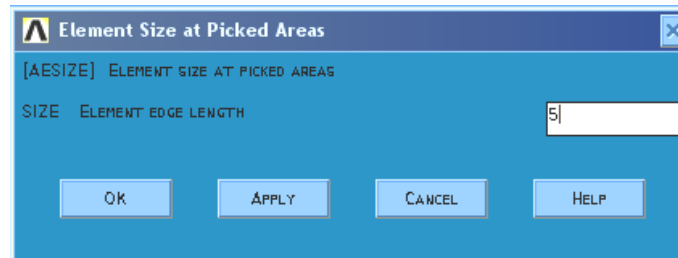
Seleccionando los atributos del modelo “Global Set”.




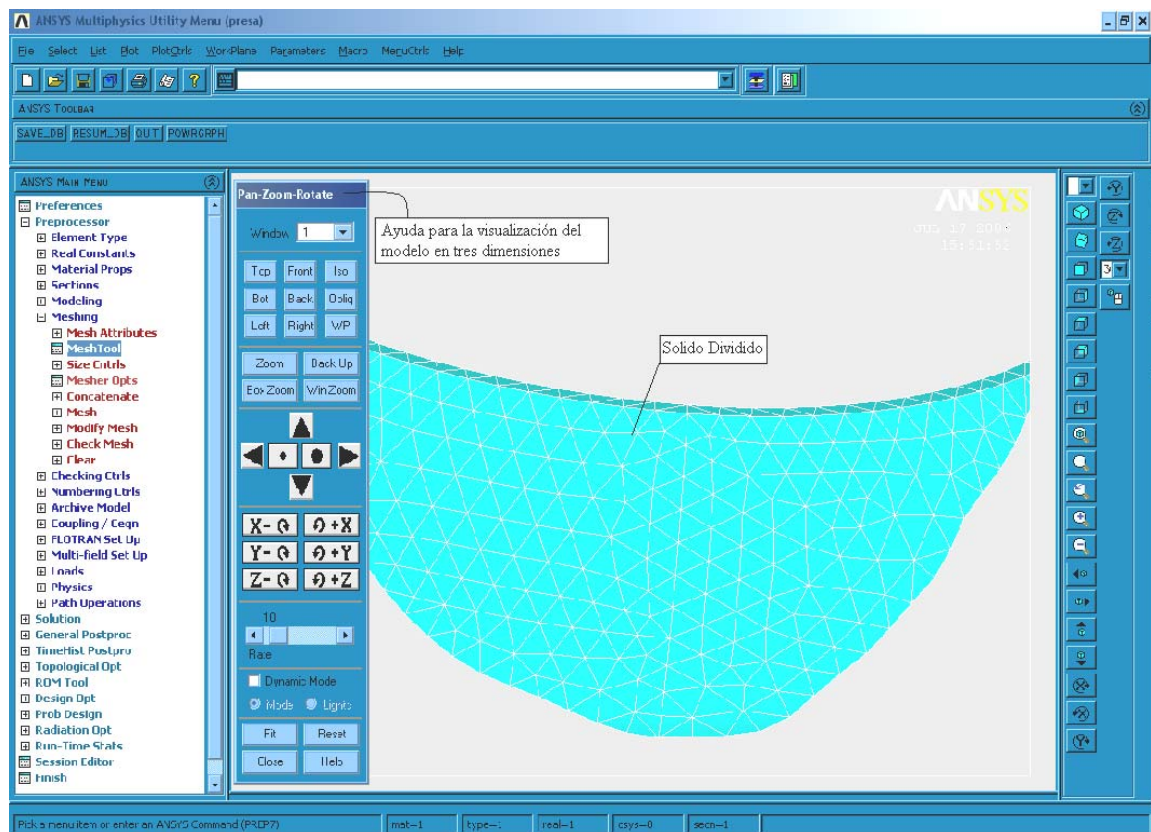
En la elección de cómo será dividido, en Mesh Tool, → Size Controls: elegimos Áreas.



Mostrando una ventanilla a la cual se le asigna la longitud, que toma en cuenta las divisiones.



Para empezar a generar la divisiones; elegimos en Mesh Tool; → Mesh (Volumes); → ; → mostrando una pantalla Mesh Volumes → (picamos Pick Hall); comenzando a dividir. Para una mejor visualización en el menú de utilidades Plot Ctrl.→ Pan Zoom Rotate...

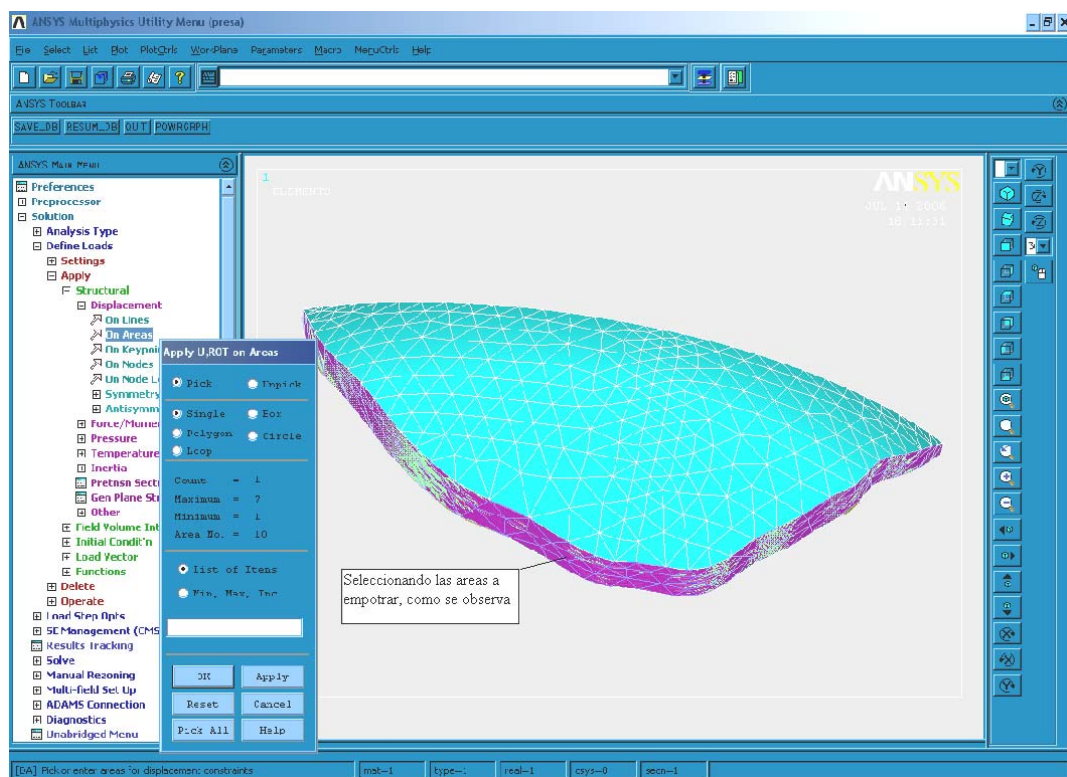


PASO 6:

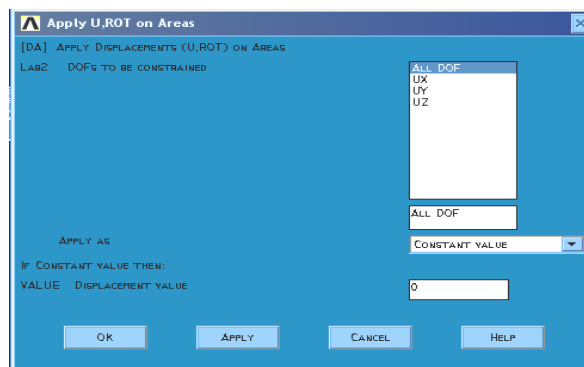
Asignando restricciones, debiendo estar empotrada en todo el lecho rocoso asignándole desplazamientos ceros, menú principal de ansys.

Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Areas.

Para mostrar las áreas adecuadas al cual se le debe asignar, el programa Ansys nos ayuda con utilidades del menú en PlotCtrl. → Pam Zoom Rotate... pudiendo acomodar a la vista mas adecuada, marcar las áreas.



Aceptando con el boton Ok, muestra la siguiente ventanilla, eligiendo All DOF → Displacement Value “0”, dando así un empotramiento perfecto del lecho rocoso.

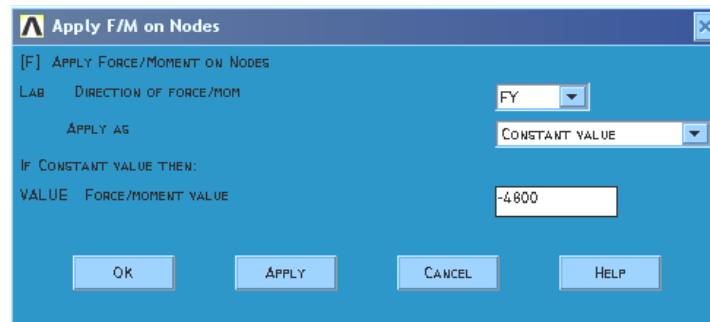


PASO 7:

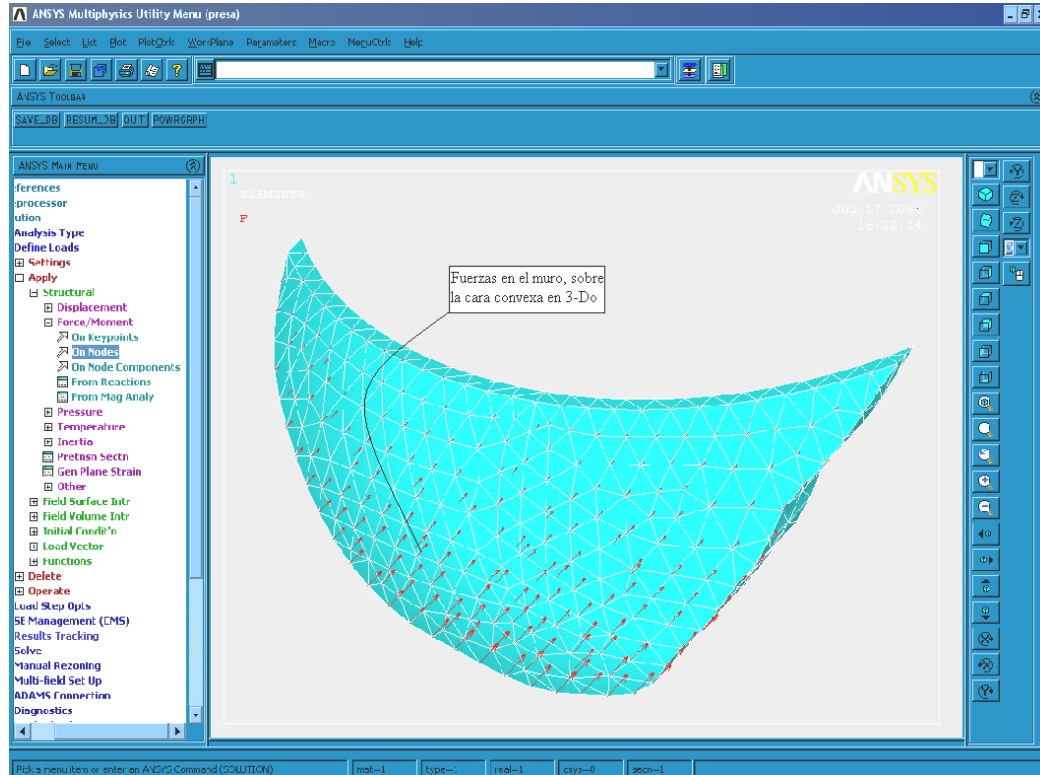
Para la aplicación de la carga, se cargara como fuerzas en los nudos, de la cara convexa del modelo, en el menú principal.

Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes.

Empezando de abajo hacia arriba; seleccionando los nudos y viendo la direcciones que llevarán dichas fuerzas.

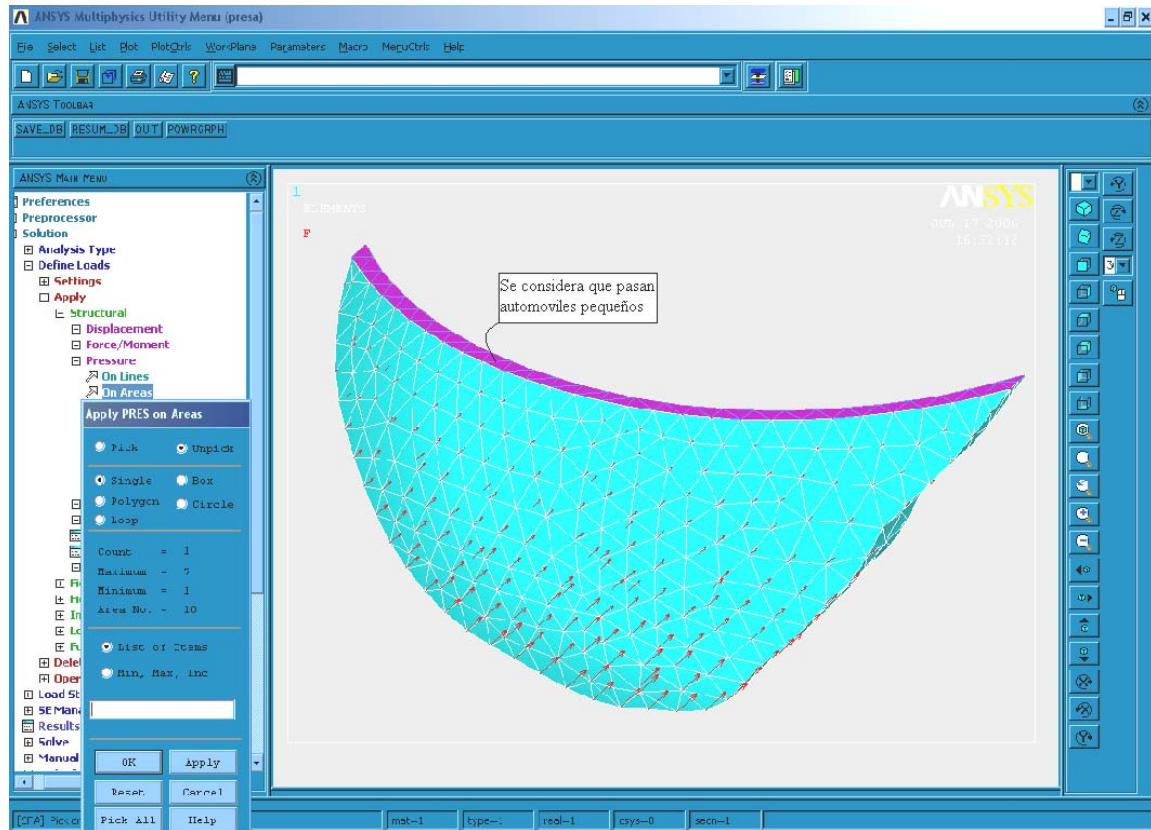


Colocando fuerzas de mayores a menores, aproximando una carga hidrostática.

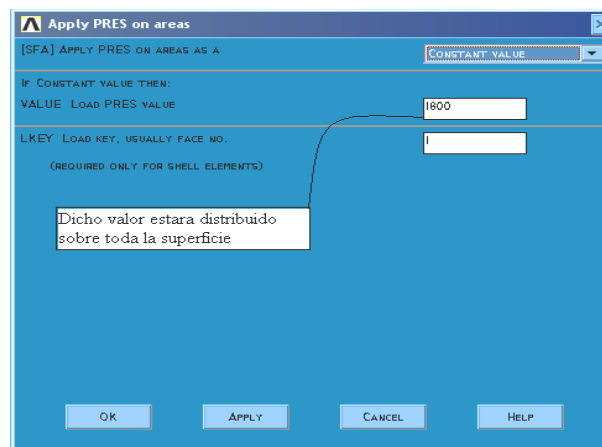


Además de ello debemos de considerar una presión uniforme en la parte superior en caso de pasar automóviles pequeños (colocando una carga de 1800 kg/m2), menú principal.

Solution → Define Loads → Structural → Pressure → On Areas.



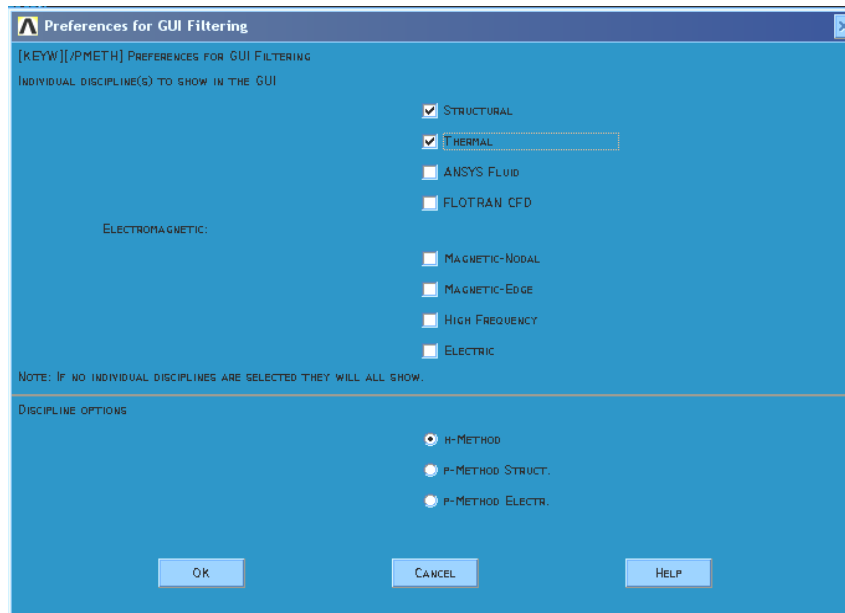
Colocando la presión sobre toda la superficie; la cual se mostrara en líneas de color rojo.



PASO 8:

Ademas de considerar las cargas estáticas, se toma en cuenta la influencia de la temperatura sobre la presa, En el menú principal.

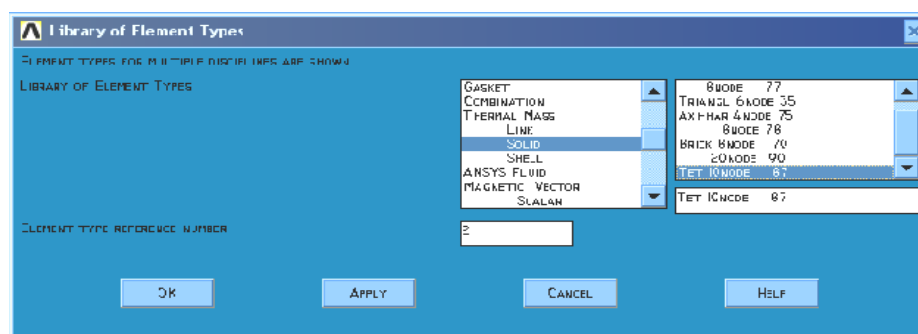
Preferentes, elegimos estructural y Termal, como sigue.



PASO 8:

Para el análisis por temperatura se debe Añadir el tipo de elemento y cambiar las propiedades del material, menú principal.

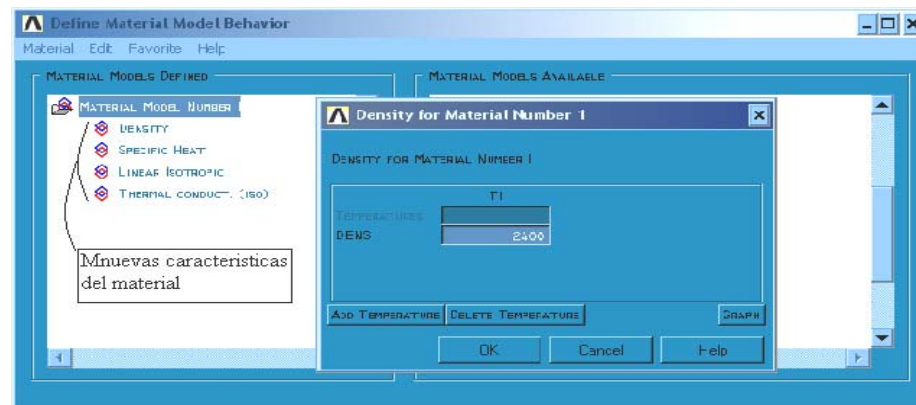
Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Add..



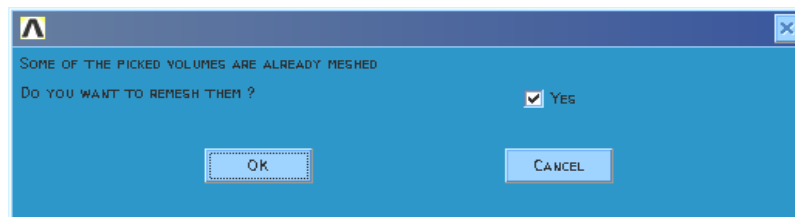
Preprocessor → Material Props → Material Models → Thermal → Conductivity → Isotropic → KXX = 5 (Thermal conductivity).

Preprocessor → Material Props → Material Models → Thermal → Specific Heat → C = 2.04

Preprocessor → Material Props → Material Models → Thermal → Density → DENS=2400



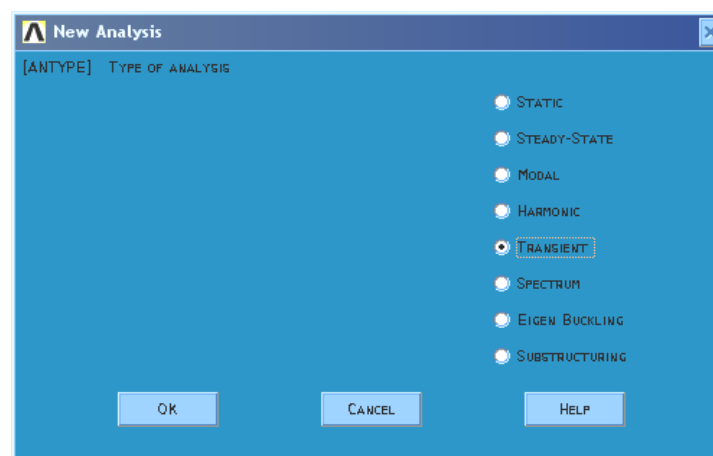
Debiendo actualizar el Meshing, aceptando la siguiente ventanilla.



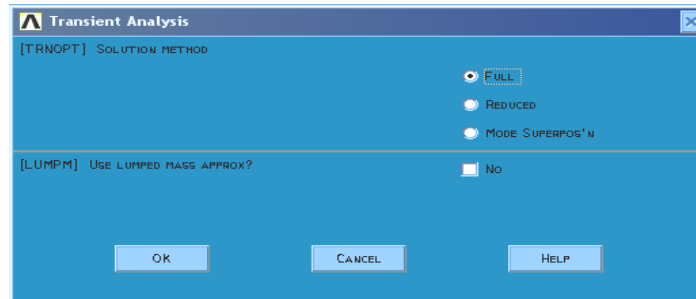
PASO 9:

Definiendo el nuevo tipo de análisis; menú principal.

Solution → Analysis Type → New Analysis → Transient..

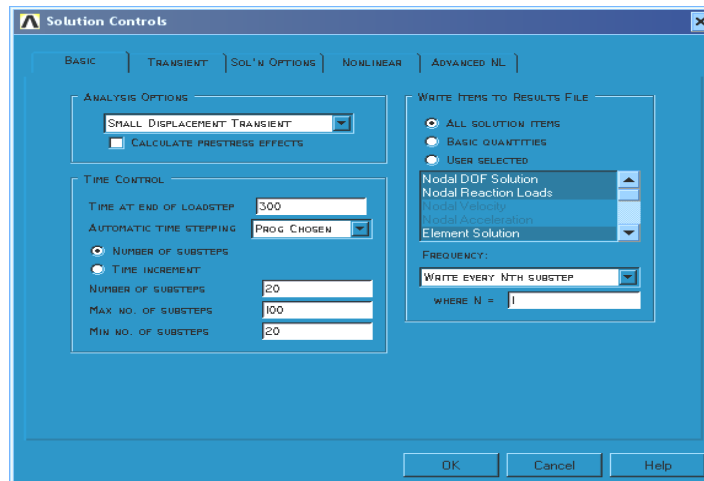


Ok! mostrando la siguiente casilla;

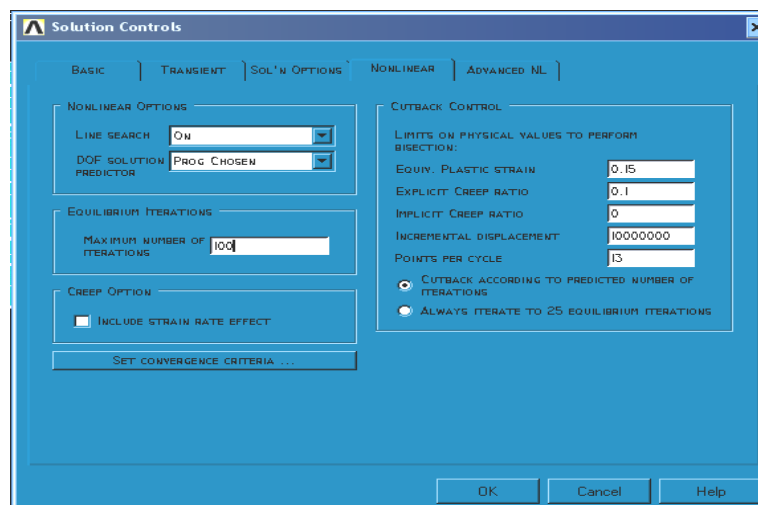


Cambiando los controladores de solución:

Solution → Analysis Type → Sol'n Controls..



Pulse el botón de la etiqueta Non Linear, encima y llénelo como sigue:

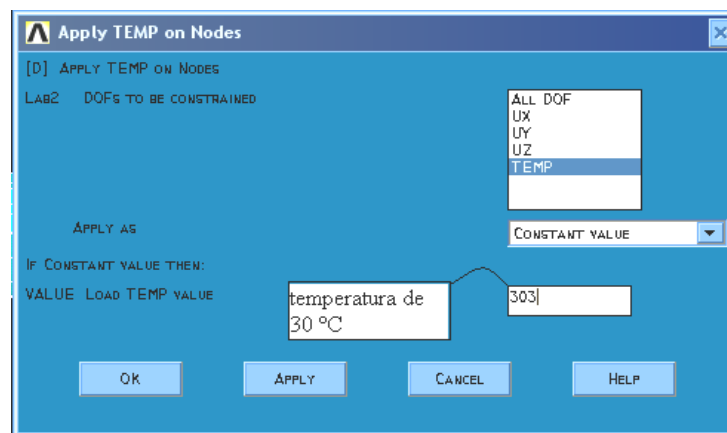


PASO 10:

Cargando la temperatura en todos los nudos de la presa, menú principal.

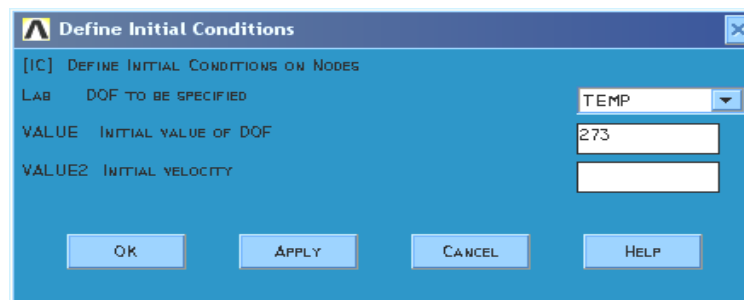
Solution → Define Loads → Apply → Thermal → Temperature → On Nodes..

Picando (Pick All); tomando en cuenta que la temperatura ira desde cero a 30°C (es decir 273°k cera una temperatura de 0°C y 303°K tendra la presa una crecida de temperatura de 0°C hasta 30°C).



Aplicando la condición inicial de temperatura, menú principal.

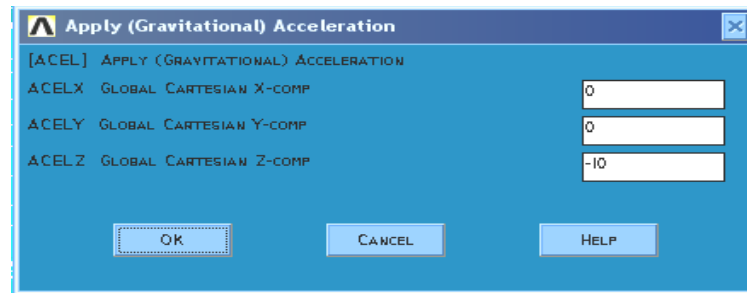
Solution → Define Loads → Apply → Initial Condit'n → Define → Pick All...



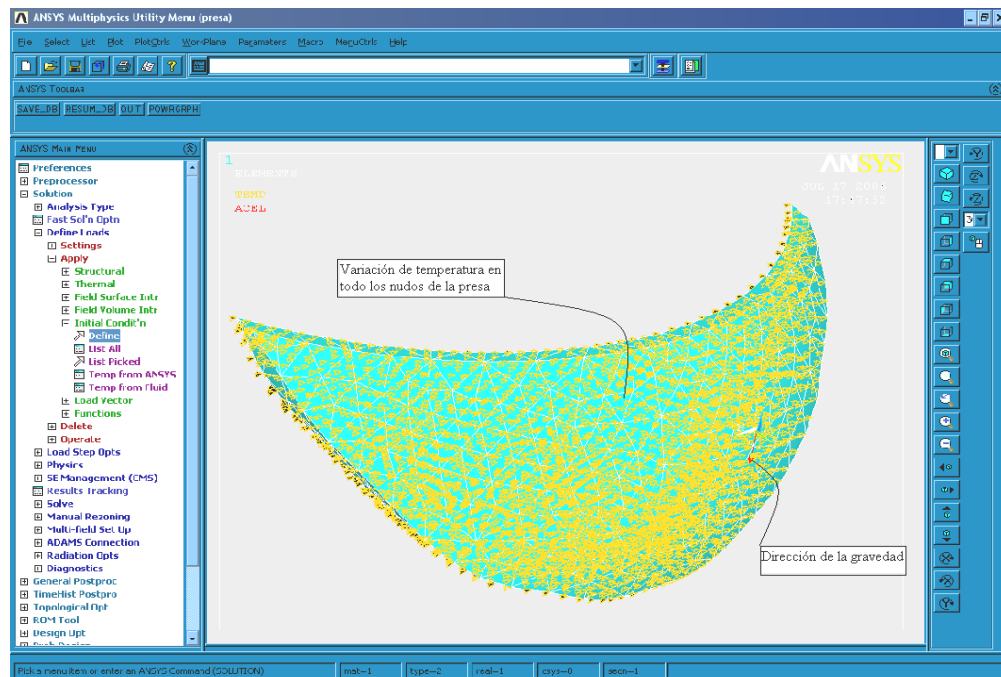
El programa nos pide el peso del elemento en que dirección deberá ir, además la gravedad, para eso nos vamos al menú principal.

Solution → Define Loads → Apply → Structural → Inertia → Gravity → Global

Debiendo tener muy en cuenta las unidades en las cuales se está trabajando (kg. m), 10gk/cm².

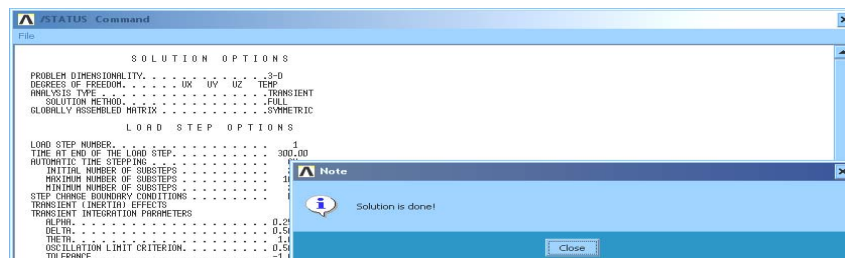


Teniendo la temperatura inicial y final, mostrada en los nudos del elemento presa.



Para la solución del problema seguimos con el menú principal.

Solution → Solve → Current LS

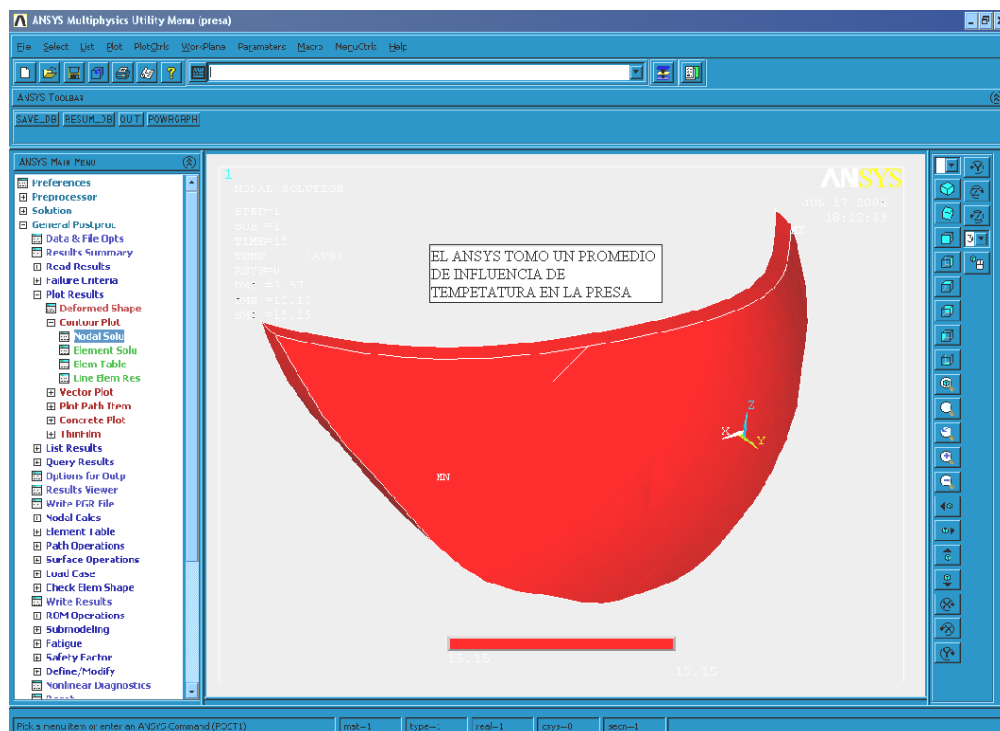
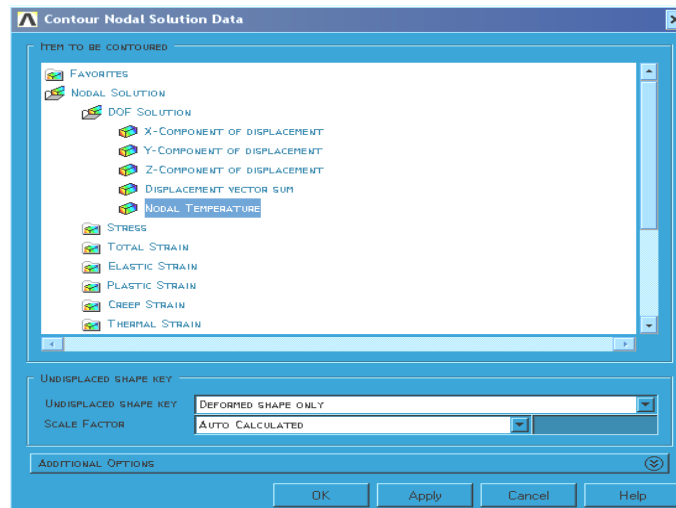


Indicándonos en una ventanilla que la solución se hace sin ningún error.

PASO 11:

Observando las soluciones de temperatura del Ansys, menú principal.

General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu ... → DOF solution, Temperature.



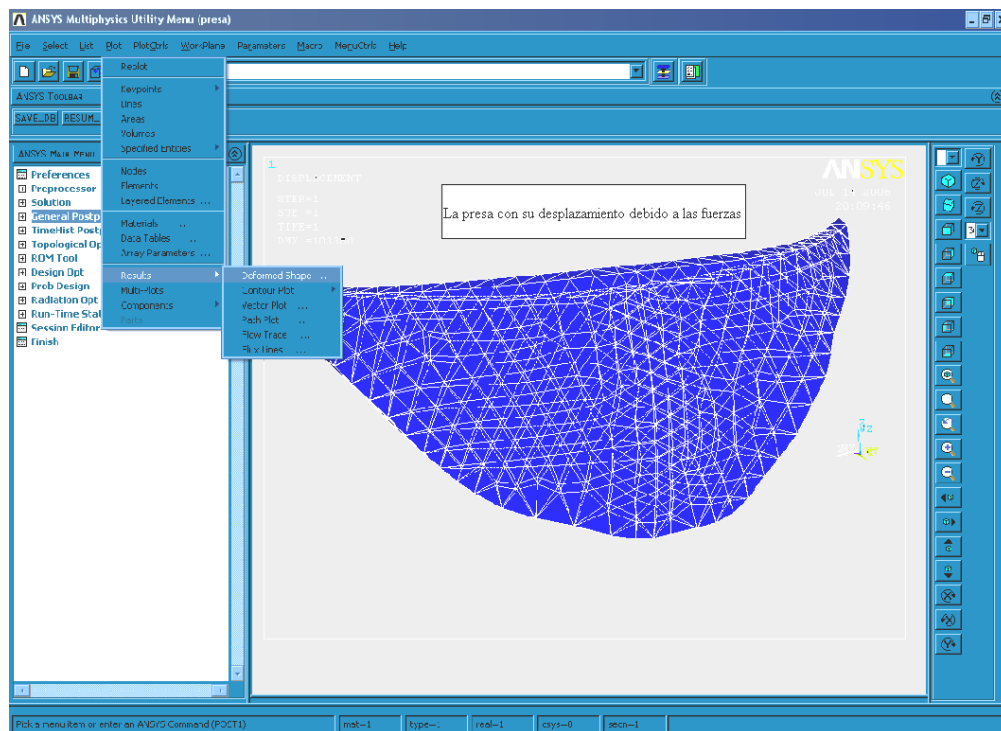
Entrando en el Postprocessor y lea en los resultados, en el menú principal.

General Postproc → Read Results → First Set

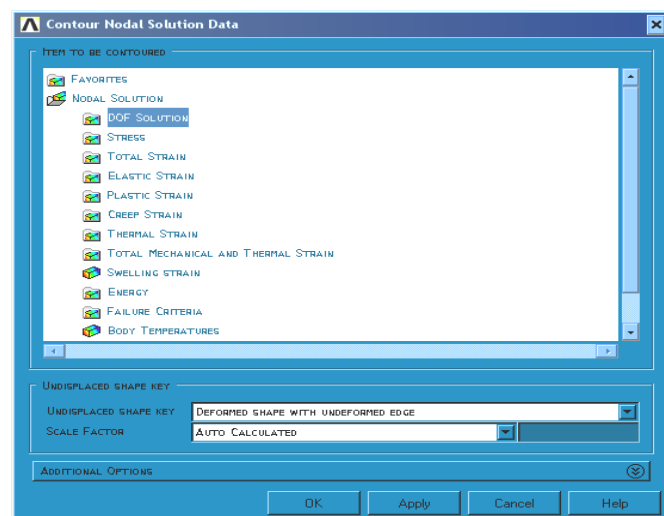
Teniendo ahora varios resultados almacenados, también pudiendo escoger lista de resultados de los desplazamientos, en Ansys menú principal.

General Postproc → List Results → Nodal Solution

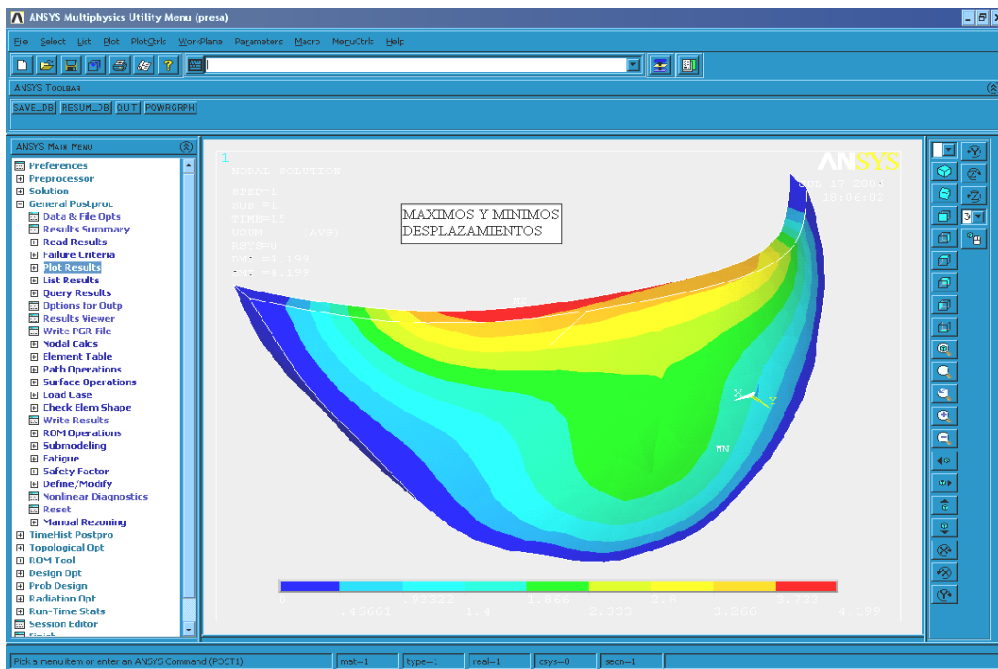
Para ver los desplazamientos en la ventana de los graficos tenemos.



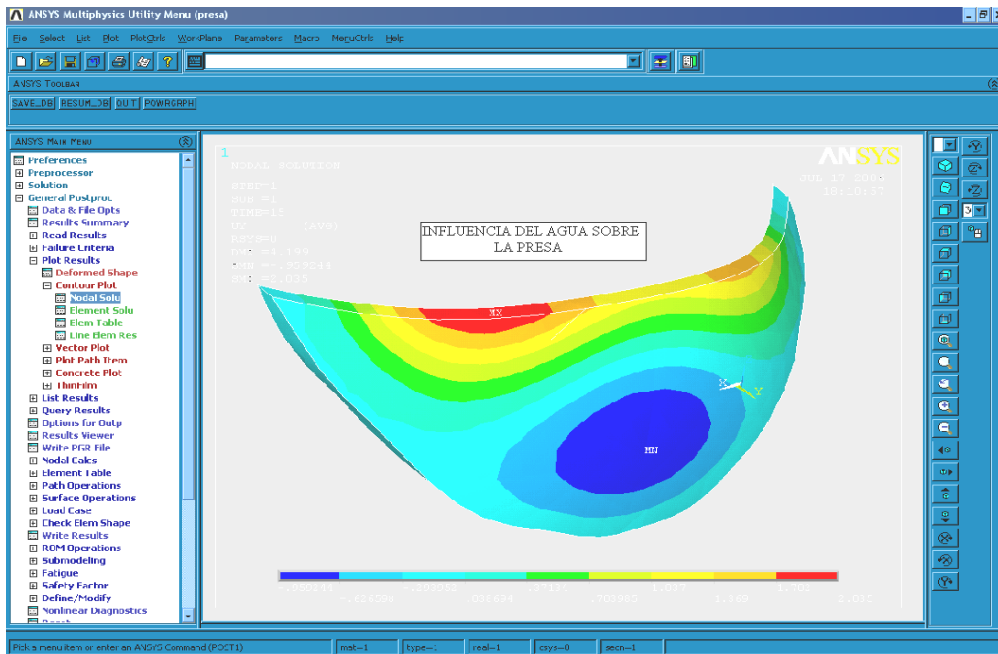
Para ver los esfuerzos nos vamos al menú de utilidades, plot → Results → Contuor Plot → Nodal Solution.... Desplegando la siguiente ventanilla.



Un ejemplo claro es observando las máximas y mínimos desplazamientos en la presa.

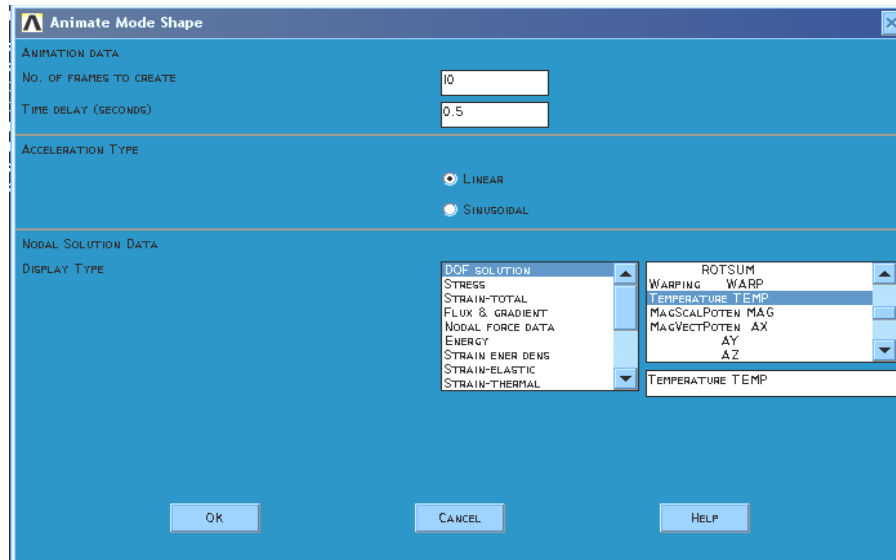


La influencia del agua sobre la presa donde se encuentran los máximos y mínimos.

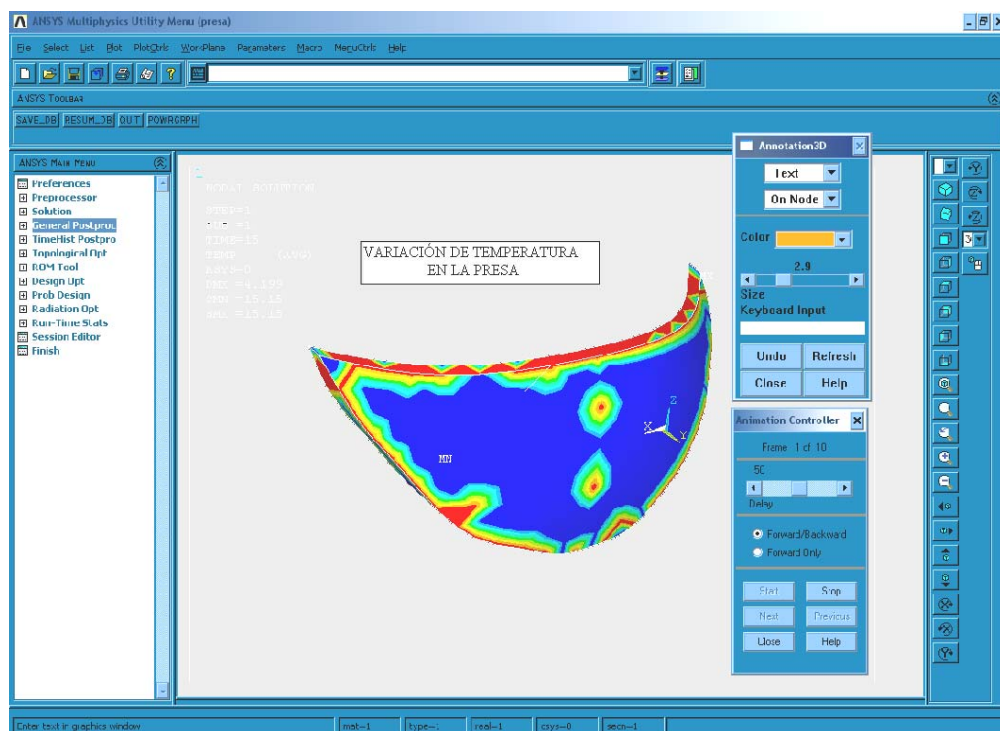


La variación de cambia de temperatura en la presa, en utilidades de menú.

Plot Ctrls→ Animate → Model Shape..., desplegando el siguiente cuadro. Debiendo elegir DOF Solution y temperature Temp, Ok!



Ejecutando el video



Una vez hecho el análisis en el programa Ansys, se observan los desplazamientos en el centro y el de la parte superior, las máximos esfuerzos, observando el comportamiento; si fuera necesario se debe cambiar la geometría para estar dentro de los criterios de simulación, para luego entrar a lo que es el diseño mismo de los elementos que componen de una presa sólida.

ANEXO E

GUÍA DE PROYECTO CÚPULA

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo de la materia tiene por objeto de simular el comportamiento de una cúpula de grandes luces y dimensionar los elementos de mallas espaciales tetraédricas de una cúpula elíptica; ante efectos de carga y su peso propio, cargas vivas y más que todo la acción del viento y temperatura.

En conformidad de estos propósitos nuestra edificación contempla estos criterios para salvaguardar en fin la integridad de sus habitantes

CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRUCTURA.

Para el desempeño del proyecto se adoptara toda la información del modelo que se tenga a disposición, ya sea desde su localización. Por ende esta primera parte del proyecto contempla los siguientes puntos:

- Localización de la edificación.
- Datos asumidos.
- Nombre del Software empleado.

Características de la edificación.

Localización del proyecto: Se debe especificar el lugar donde se localizara la cúpula.

Datos asumidos: Al respecto se debe aclarar que todo el grupo de datos requeridos son adaptados ya sea en base a los espacios a cubrir, la cantidad de personas a ubicar o directamente se asumen los mismos.

Norma empleada: Especificar siempre la norma que se empleara.

Nombre del Software empleado: El programa de simulación estructural empleado para las solicitudes y acciones en los elementos estructurales es la versión ANSYS v10.0.

ALCANCE DEL PROYECTO.

El proyecto posee un grupo de requerimientos que avalan con más garantía la representatividad de la geometría de una cúpula, para ello se distinguen las siguientes características.

Simulación Estructural:

La concepción del modelo estructural es una cúpula, cuyos elementos son las cascaras de forma tridimensional. Para ello se observa completamente la geometría así dar soluciones, entendiendo el concepto de mallas espaciales así dando solución al Modelo Estructural.

SIMULACIÓN ESTRUCTURAL.

La simulación estructural se lo realiza con la ayuda del software del ANSYS v.10.

Cargado De La Estructura:

Este texto solo explica en forma macro el procedimiento de cargado de una estructura.

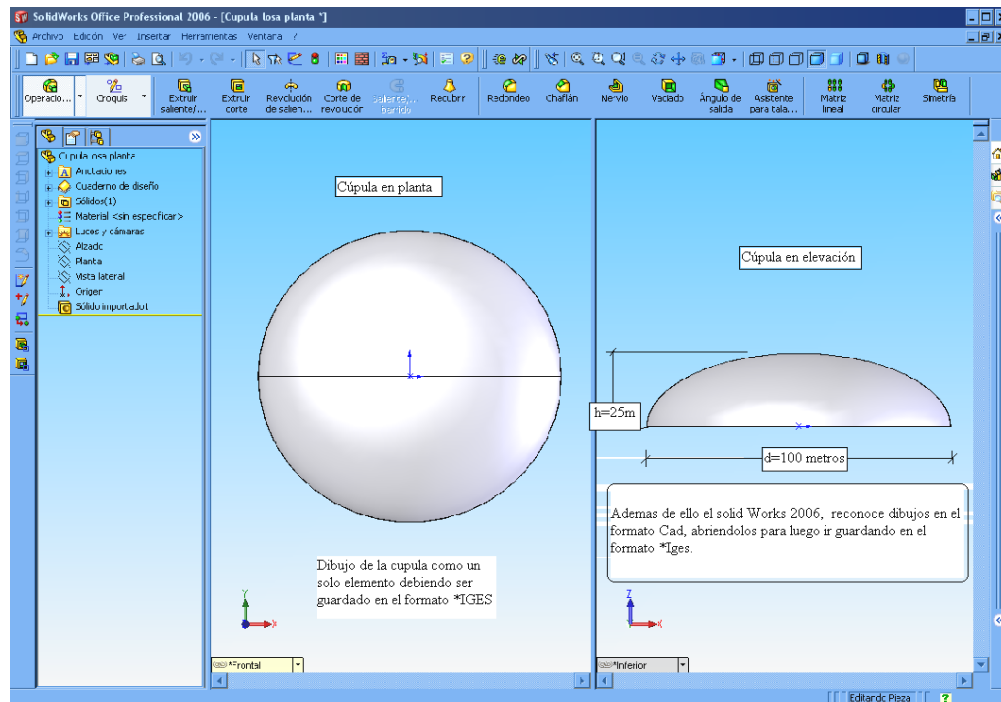
Se supone que el estudiante ya tiene conocimiento básico del ANSYS v.10.

PASO 1. Dispondremos de la ayuda de SolidWorks SP0.0 para dibujar la geometría de la cúpula de grandes luces.

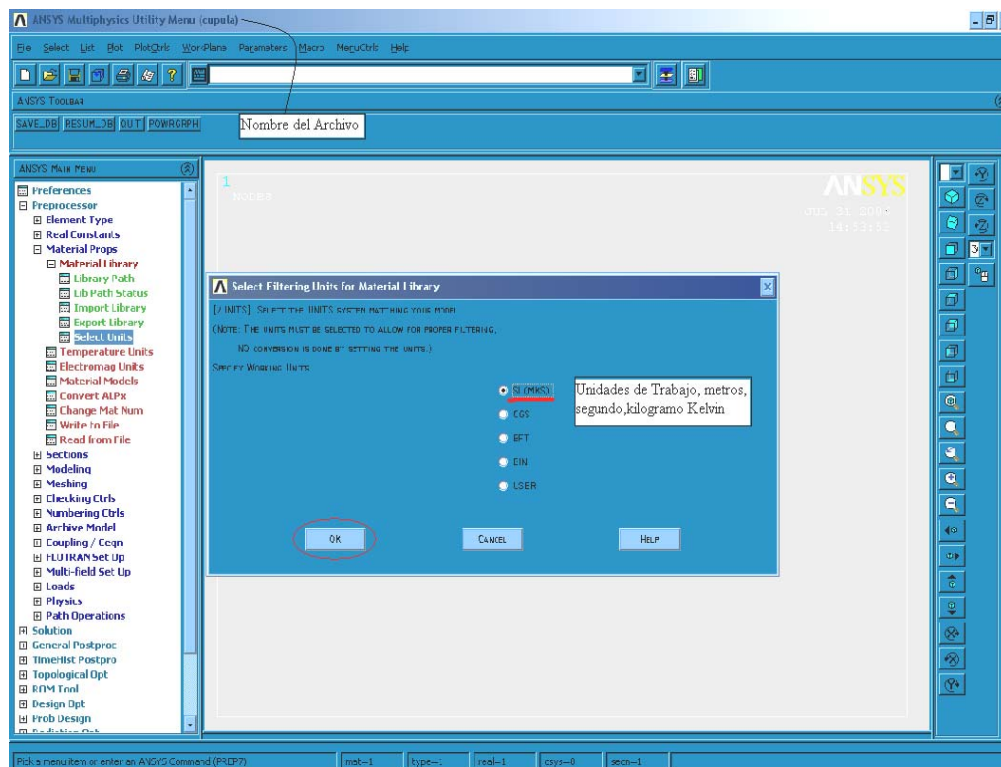
Diámetro: 100 m.

Altura: 25 m.

La definición de la estructura esta en base a una elipse, apartir de la cual se genera la superficie de un domo, elipse de revolución, como se observa a continuación.



A continuación se crea un nuevo proyecto en Ansys v.10 y escogemos un modelo “estructural”, dentro de la pestaña de preferencias Preferentes → Estructural → Ok.



Se deberá seleccionar la unidades de trabajo, sistema internacional (International system), (SI or MKS; m, kg, s, K), en el menú principal;

Preprocessor → Material Props → Material Library → Select Units.

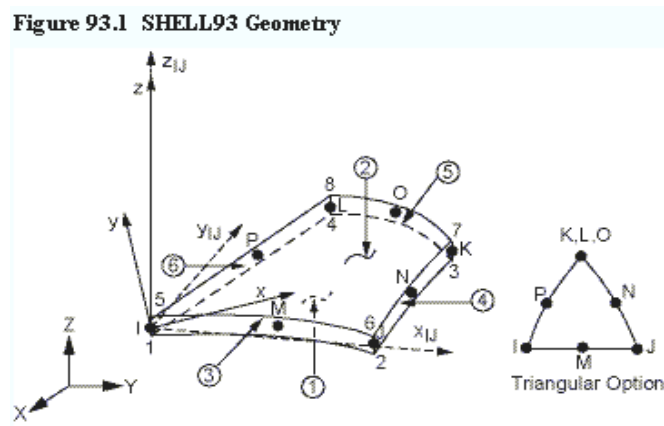
Para la introducción de esfuerzos, debemos entender en que dimensiones trabaja dicho programa, para ello presentamos el siguiente cuadro sacado del Ansys (Help “Units”).

Table 1.1 Mechanical Conversion Factors for MKS to μ MKSv

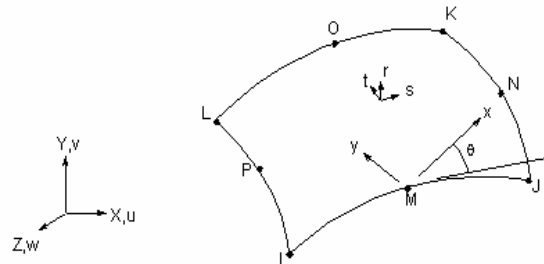
Mechanical Parameter	MKS Unit	Dimension	Multiply by This Number	To Obtain μ MKSv Unit	Dimension
Length	m	m	10^6	μm	μm
Force	N	$(\text{kg})(\text{m})/(\text{s})^2$	10^6	μN	$(\text{kg})(\mu\text{m})/(\text{s})^2$
Time	s	s	1	s	s
Mass	kg	kg	1	kg	kg
Pressure	Pa	$(\text{kg})/(\text{m})(\text{s})^2$	10^{-6}	MPa	$(\text{kg})/(\mu\text{m})(\text{s})^2$
Velocity	m/s	m/s	10^6	$\mu\text{m/s}$	$\mu\text{m/s}$
Acceleration	$\text{m}/(\text{s})^2$	$\text{m}/(\text{s})^2$	10^6	$\mu\text{m}/(\text{s})^2$	$\mu\text{m}/(\text{s})^2$
Density	$\text{kg}/(\text{m})^3$	$\text{kg}/(\text{m})^3$	10^{-18}	$\text{kg}/(\mu\text{m})^3$	$\text{kg}/(\mu\text{m})^3$
Stress	Pa	$\text{kg}/(\text{m})(\text{s})^2$	10^{-6}	MPa	$\text{kg}/(\mu\text{m})(\text{s})^2$
Young's Modulus	Pa	$\text{kg}/(\text{m})(\text{s})^2$	10^{-6}	MPa	$\text{kg}/(\mu\text{m})(\text{s})^2$
Power	W	$(\text{kg})(\text{m})^2/(\text{s})^3$	10^{12}	pW	$(\text{kg})(\mu\text{m})^2/(\text{s})^3$

PASO 2:

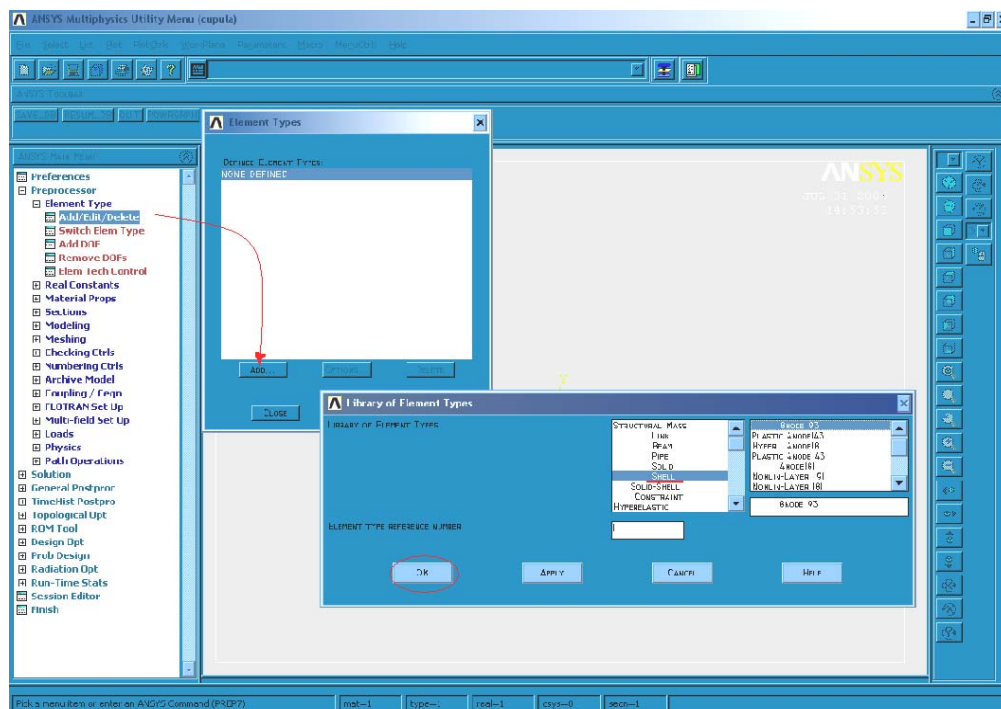
Definición de materiales, es necesario definir el tipo de elemento estructural a emplear, Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → Add, donde elegimos el Shell-93, que tiene las propiedades mas adecuadas para esta simulación.



Shell-93: satisface particularmente bien para modelar las cascaras, el elemento tiene seis grados de libertad a cada nudo; las formas de deformaciones son cuadráticas en las dos direcciones del modelo, el elemento tiene plasticidad, endurecimiento de tensión, desviaciones grandes y las capacidades de tensión grandes.

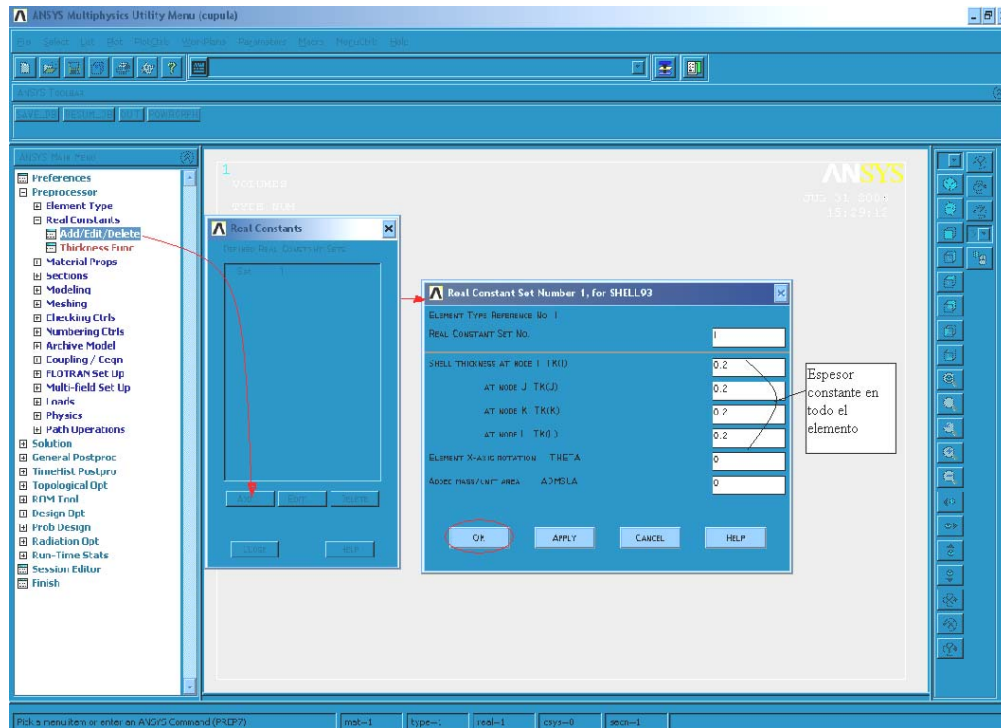


Eligiendo el tipo de elemento en el programa Ansys, como se observa.



Previo antes de la importación se debe definir el espesor de la cascara “Shell” nuestro caso será de 20 centímetros.

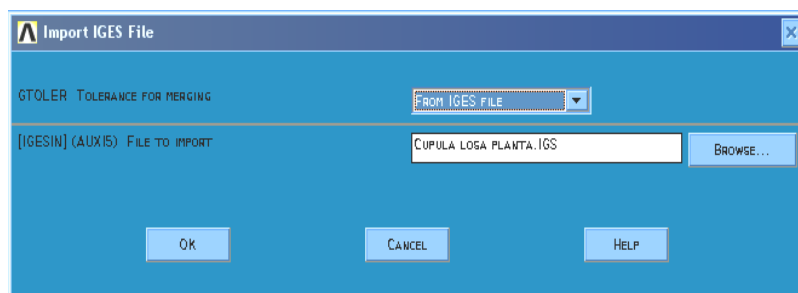
Preprocessor → Real constants → Add/Edit/Delete → Add....



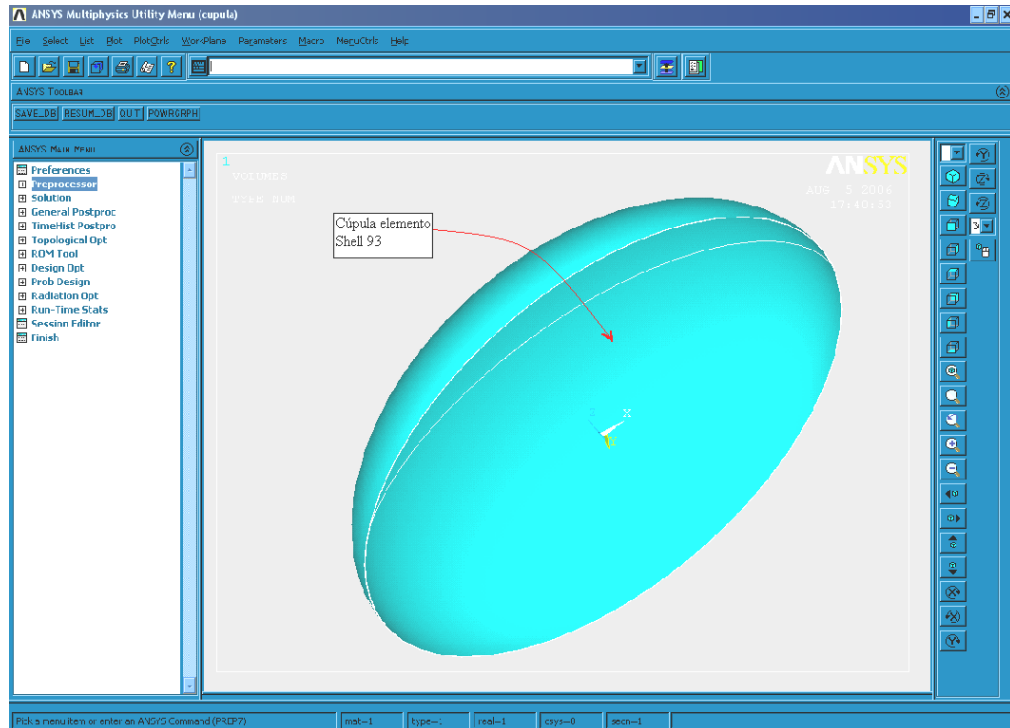
PASO 3:

La importación de la estructura en el formato guardado *.Iges. , será:

File → Import → IGES.... Mostrándonos una ventanilla de importación de archivos formato *.IGES. (buscando con Browse... el archivo guardado) asignamos Ok, desplegando otra ventanilla (Import Iges File) como se observa.



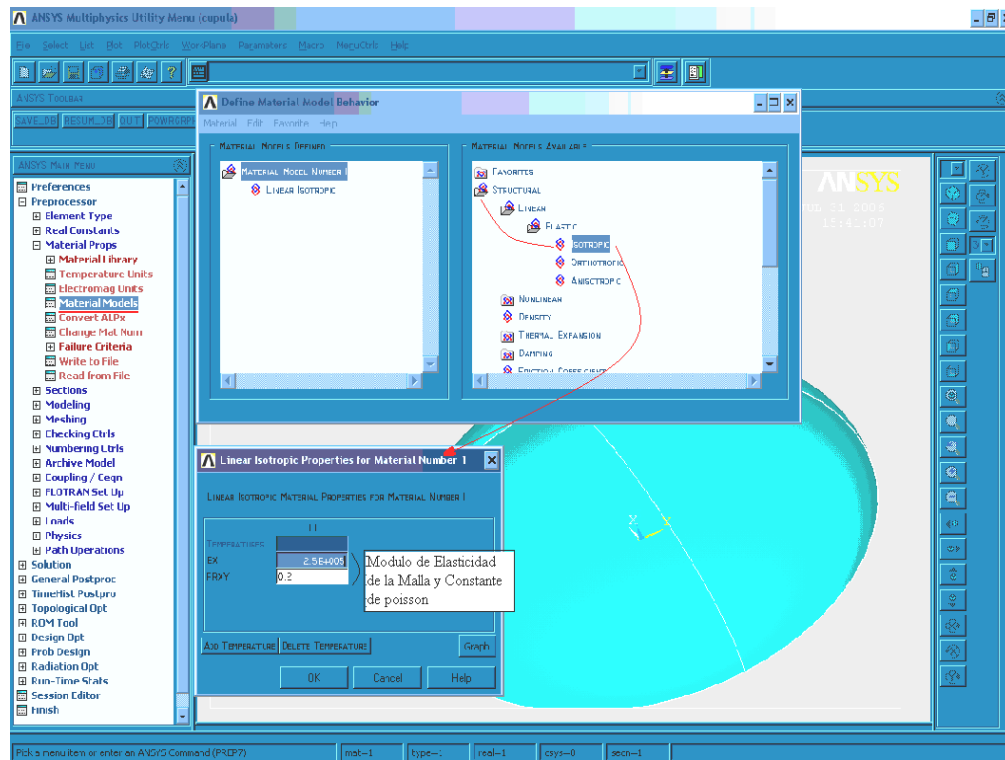
Haciendo OK_i, tenemos el modelo importado, como se observa.



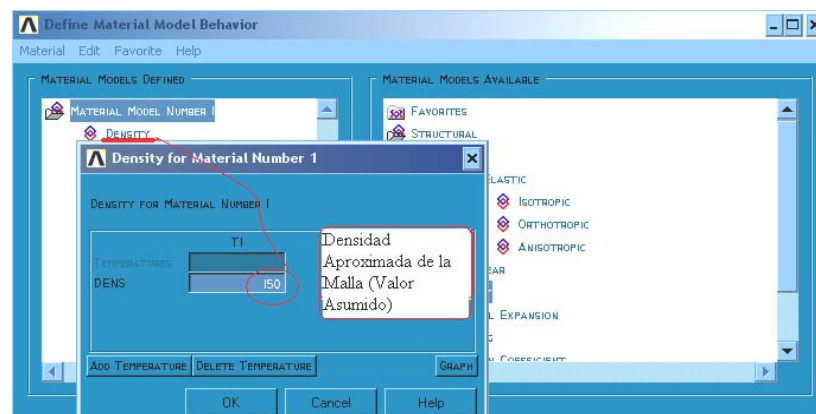
PASO 4:

Se debe definir el material del modelo, de la cúpula presa del menú principal.

Preprocessor → Material Props → Material Models, desplegándonos una pantalla (Define Material Model Behavior), haciendo clic en Structural → Linear → Elastic → Isotropic, donde cargamos el Modulo de elasticidad del material y la constante de Poisson, como se observa a continuación.



Ademas se debe colocar la densidad del material a emplear para la cúpula, tomando en consideración 150 kg/m^3 , después salir de la opción.

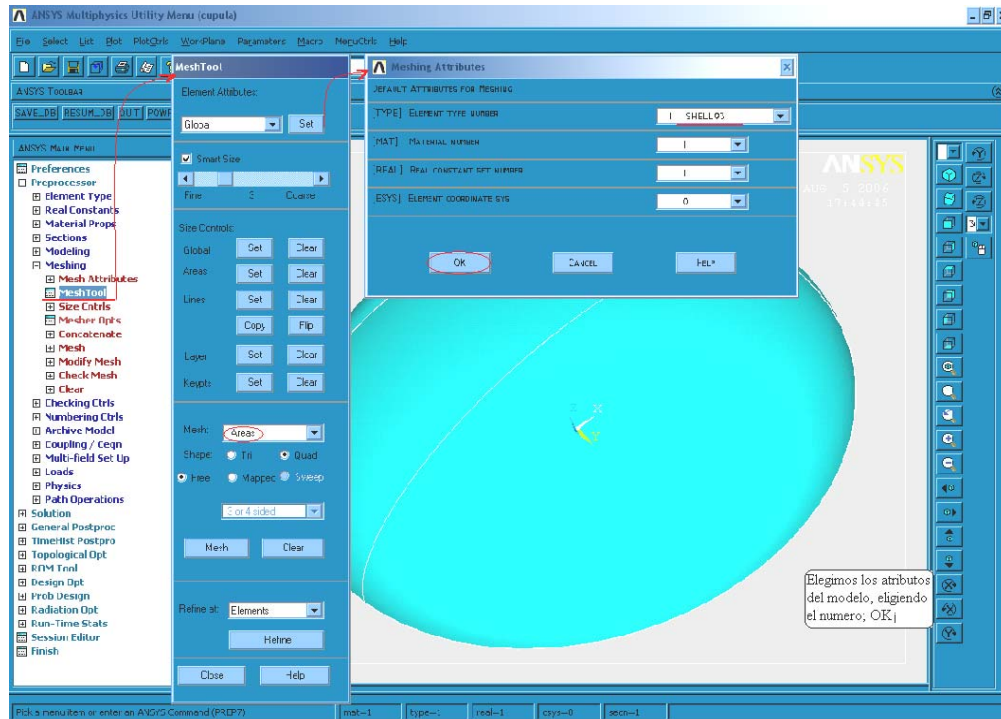


PASO 5:

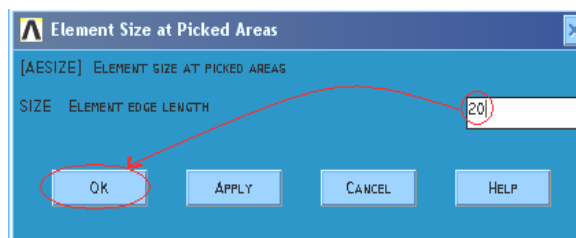
Proseguimos con la división en elementos finitos, nosotros usaremos una malla moderada, Clasificada según tamaño para esto; en el menú principal.

Preprocessor → Meshing → Mesh Tool, observando como sigue en el modelo.

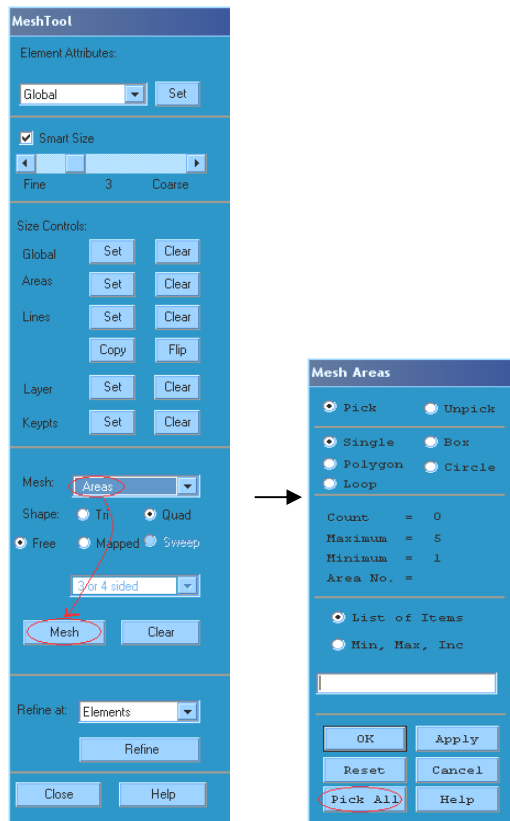
Seleccionando los atributos del modelo “Global Set”.



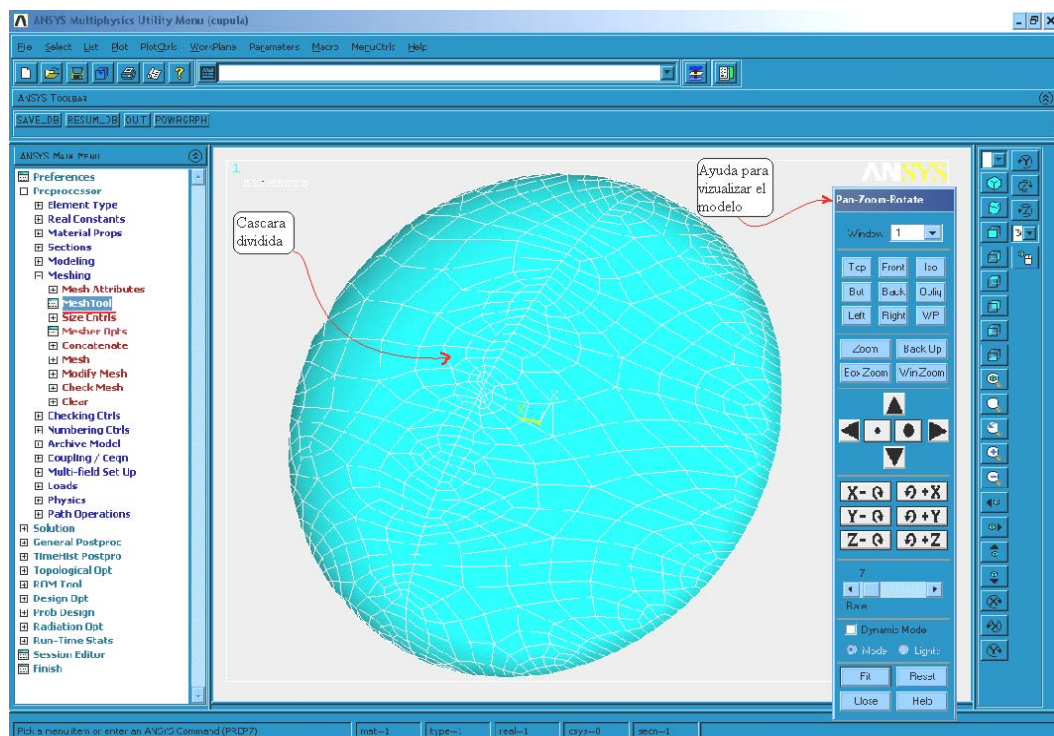
Debiendo seleccionar en la misma ventanilla, Size Controls: elegimos Areas.



Volviendo a la ventanilla de Mesh Tool, elegimos en Mesh → Areas; y picamos en el botón Mesh como se observa a continuación; Seleccionando las áreas a dividir.



El programa empieza a generar las divisiones, mostrando la siguiente forma, se recomienda utilizar la ayuda de visualización en tres dimensiones, para observar la discretización mas adecuadamente.

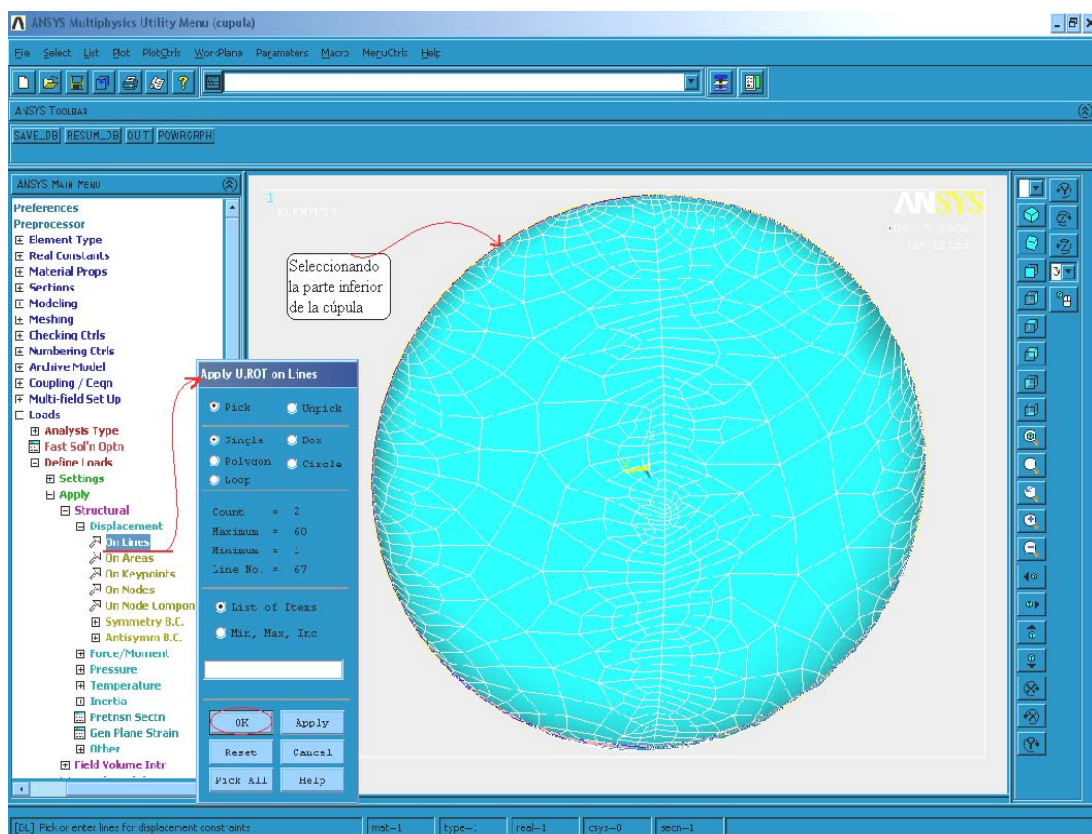


PASO 6:

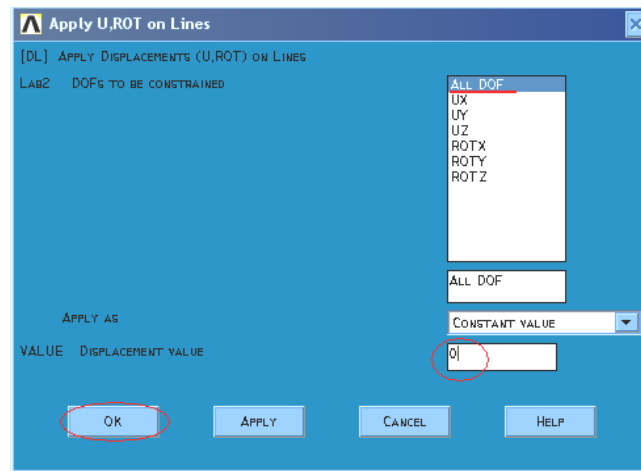
Asignando restricciones, debiendo estar empotrada en todo el borde inferior de la cúpula asignándole desplazamientos de “0” centímetros, menú principal de Ansys.

Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On lines.

Para mostrar las áreas adecuadas al cual se le debe asignar, el programa Ansys nos ayuda con utilidades del menú en PlotCtrl. → Pam Zoom Rotate... pudiendo acomodar a la vista mas adecuada, marcar las líneas.



Después de seleccionar marcamos el botón de OK, desplegándonos la siguiente ventanilla.



Teniendo un empotramiento en toda la superficie de la parte inferior empotrada.

PASO 7:

Para la aplicación de la carga de viento, se cargara como presión y succión; en la superficie de la cúpula, es decir en la parte convexa del modelo. Para determinar la carga producida por el viento en la estructura se tiene:

$$p = 0.002558 \cdot C_d \cdot V^2$$

con una velocidad del viento $V = 150 \frac{km}{hr} = 93.2 mph$; $C_d = 1.0$

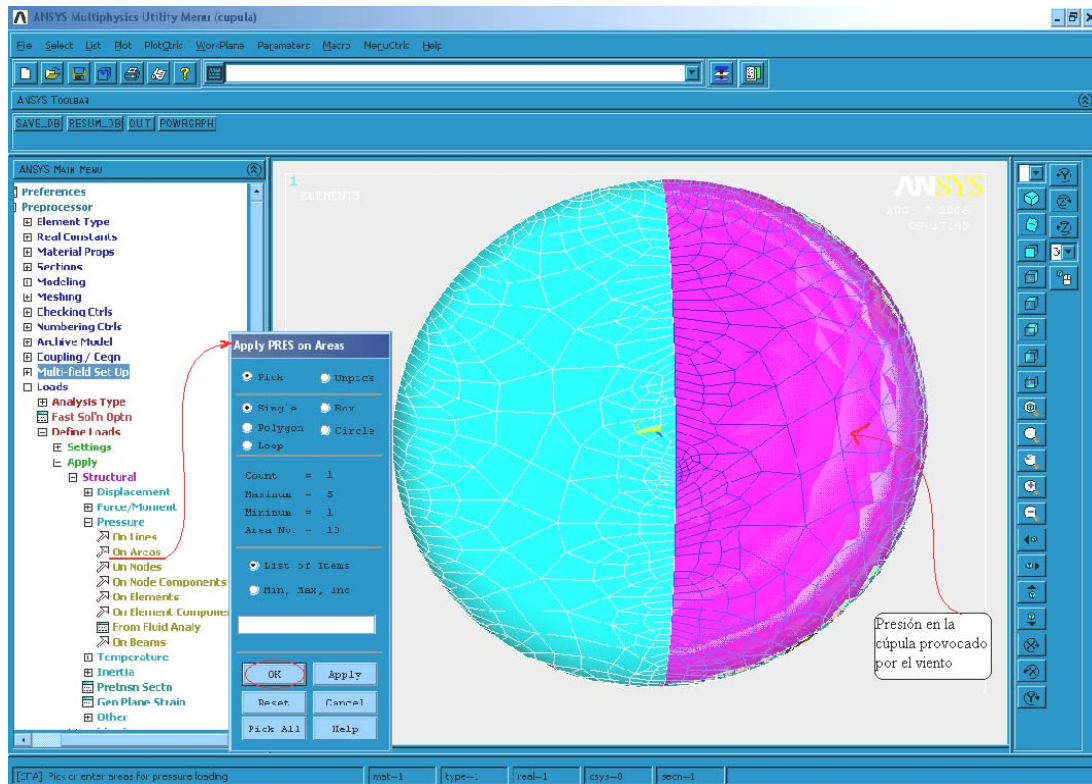
$$p = 0.002558 \times 1.0 \times 93.2^2 = 22.22 \frac{kg}{m^2}$$

Debiéndolo convertir en Pázcales.

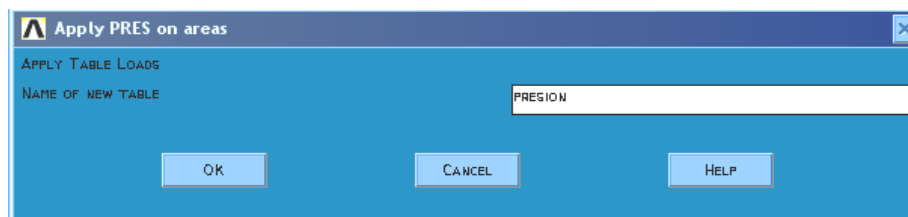
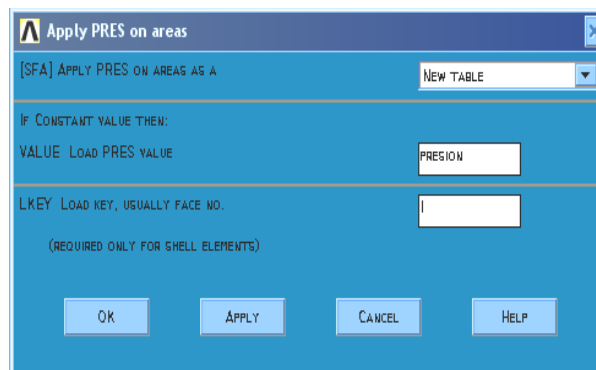
$$p = 217.89 \text{ pascales} = 218(\text{pascales})$$

Del modelo en el menú principal, debiendo seleccionar el lado derecho, al cual séle cargara presión, y el lado izquierdo succión.

Solution → Define Loads → Structural → Pressure → On Areas.



Desplegando la siguiente ventanilla de dialogo. Como la influencia del viento en la cúpula es variable de acuerdo a la altura según la teoría. Trabajaremos con tablas, como se observa.



Desplegándonos el siguiente cuadro de dialogo. Donde debemos especificar cuantos valores de presión varían.

Desplegando otra ventanilla en la cual debemos introducir los valores de la presión de acuerdo a (presión positivo y succión Negativo respecto el ángulo en $0^\circ < \alpha < 180^\circ$) como se observa a continuación.

Table Array: PRESION(0,0) = f(Row,Column,Plane)

File Help

Page Increment Full Page

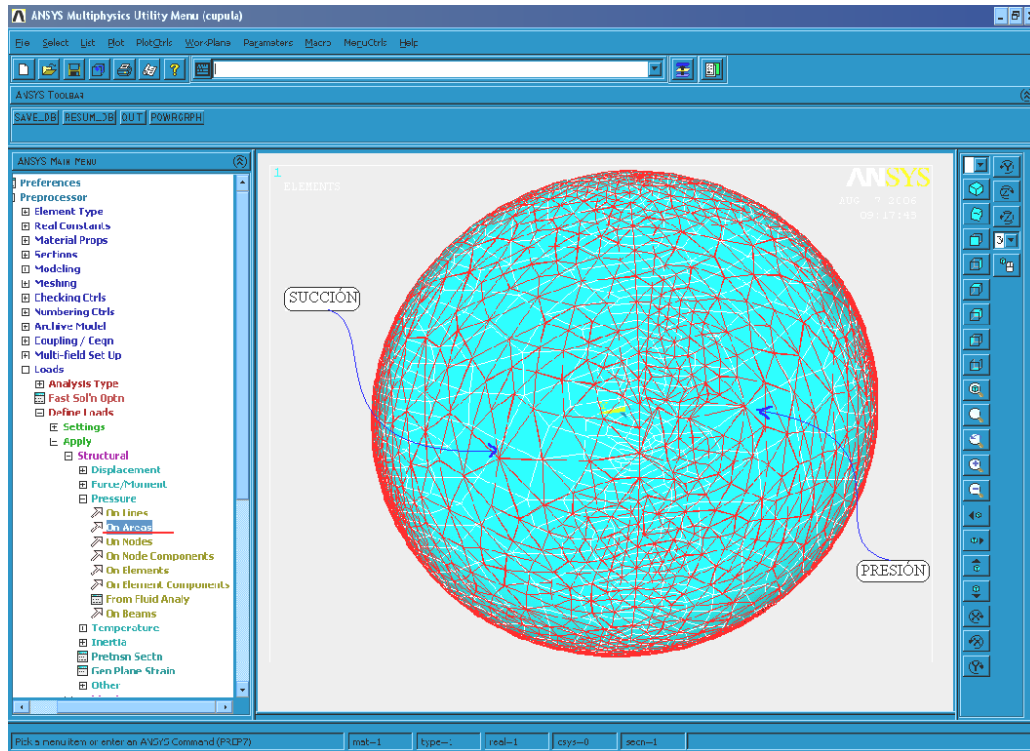
Valores de la presión respecto P_{sen}

	Column
	0
74.6	2
140.1	3
188.8	4
214.7	5
218	6
214	7
188.8	8
140.1	9
0	10

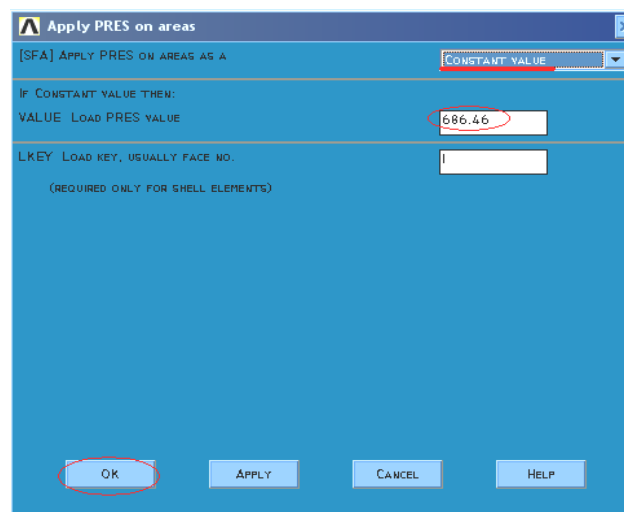
Row

Respecto la altura

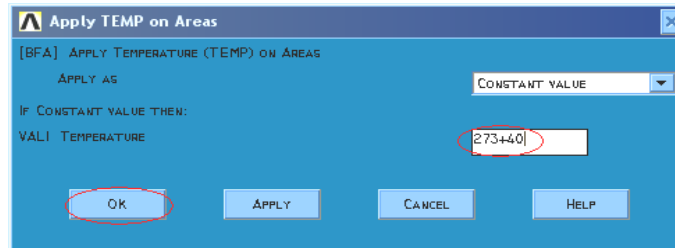
Debiendo ser llenado de la misma forma para la succión pero de signo negativo. el otro lado de la superficie de la cúpula a la cual esta afectada por la succión. Observando toda la cúpula influida por el viento.



También consideramos una carga de presión constante de 70 kg/m², siendo un promedio del peso de una persona 686.46 Pázcales.

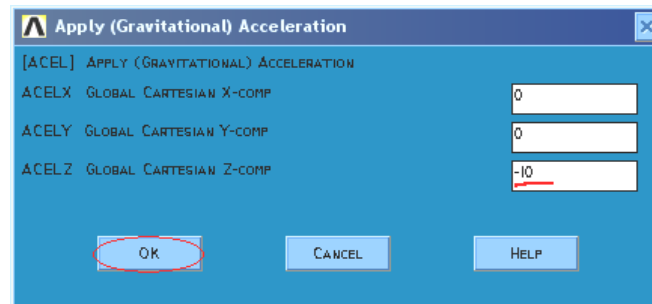


De la misma forma asignamos una temperatura constante de 40 °C en todo el modelo.



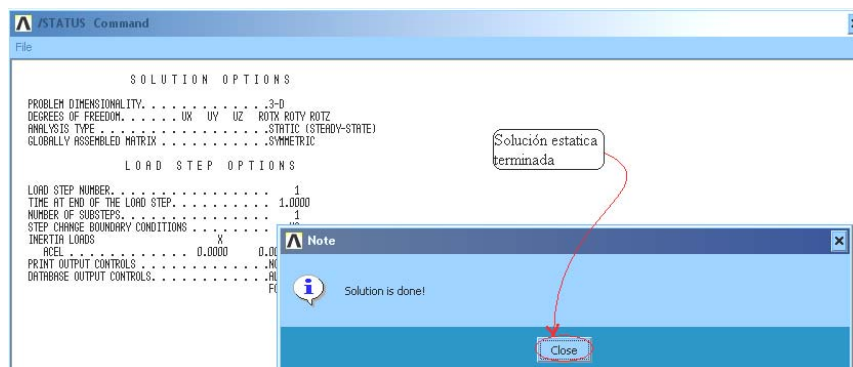
Asignamos el peso por gravedad del elemento, en el menú principal.

Preprocessor → Loads → Define Loads → Apply → Structural → Inertia → Gravity → Global....



Hacienda el análisis estático del modelo, en el menú principal, como se observa.

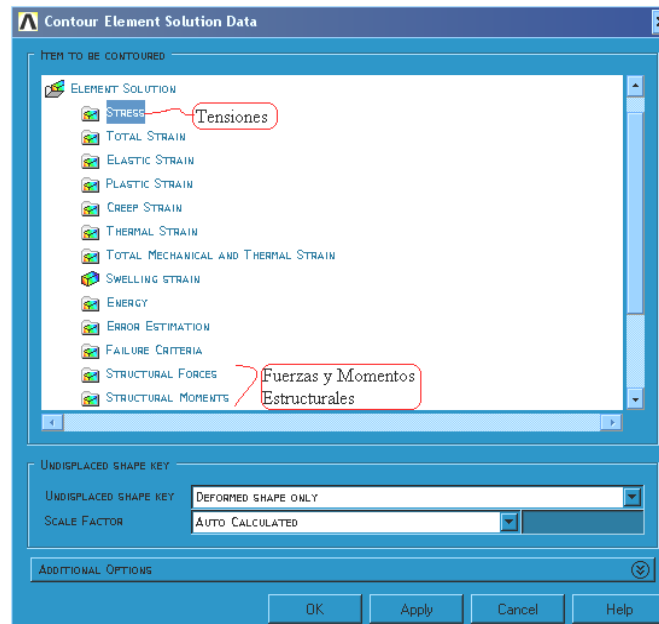
Solution → Solve → Current LS...



Almacenando la información, en el menú principal.

General Postproc → Read Results → First Set... almacenado todas las soluciones estáticas.

Observamos las soluciones del modelo, General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Element Solu, desplegando la siguiente ventanilla, en la cual nosotros podemos observar:



De esta misma podemos observar el resultado deseado a manera de mapa de contornos.

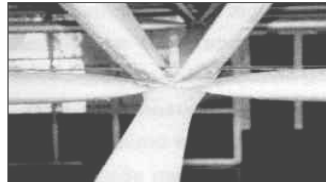
Una vez que se tiene el análisis completo del modelo, debemos entender el empleo del programa de mallas espacial. Son estructuras tubulares espaciales, construidas por barras cilíndricas huecas unidas en nudos con diversas configuraciones, están son utilizadas con gran complejidad y forma, para cubrir espacios vacíos de grandes dimensiones.

En la configuración tradicional estas estructuras se basan en dos capas paralelas, interconectadas por barras paralelas e inclinadas, formando una estructura espacial articulada, como se observa en la siguiente figura.



Siendo este tipo compuesto por tres tubos unidos, agrupados en tres direcciones formando una malla con espaciamiento triangular observando el detalle.

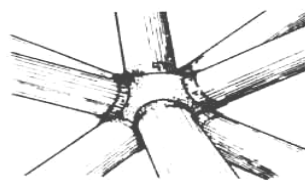
Teniendo diferentes tipos de uniones para en lo que el empleo de mallas espaciales, presentando algunos sistemas empleados.



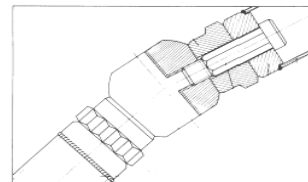
Sistema TÍPICO (Brasileiro)



Sistema VESTRUT



Sistema OKTAPLANTTE



Sistema MERO (Alemão)

Antes de ingresar al programa mallas espaciales se debe conocer algunas propiedades a introducir, el tipo de malla a emplear, así debiendo conocer las dimensiones de cada barra.

Usaremos una malla Tetraédrica,

$$\text{Altura de la malla} \quad h = \frac{L}{80} = \frac{150}{80} = 1.870m.$$

$$\text{Longitud de la barra} \quad l = \frac{L}{70} = \frac{150}{70} = 2.1430m$$

Debiendo tener en cuenta que dichas dimensiones varían de acuerdo a la esfuerzos que presenta; tanto de tracción y compresión en la cúpula.

Ademas debemos conocer el área de los tubos a emplear.

De la Norma Load And Resistence Factor Design Specification for Structural Steel Buildings, en el capitulo de Dimensiones y propiedades, en la pagina I-71.

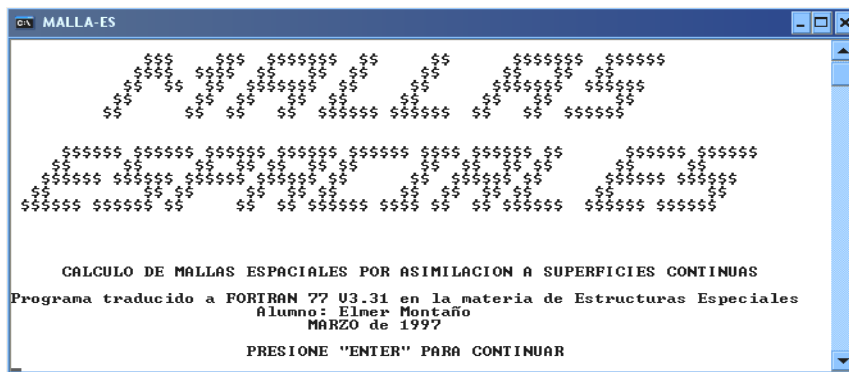
$$\text{HSS4.000} \rightarrow \text{Area} = 12.7 \text{ in}^2 = 1.968 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Radio} = 1.31 \text{ in} = 3.327 \text{ cm}.$$

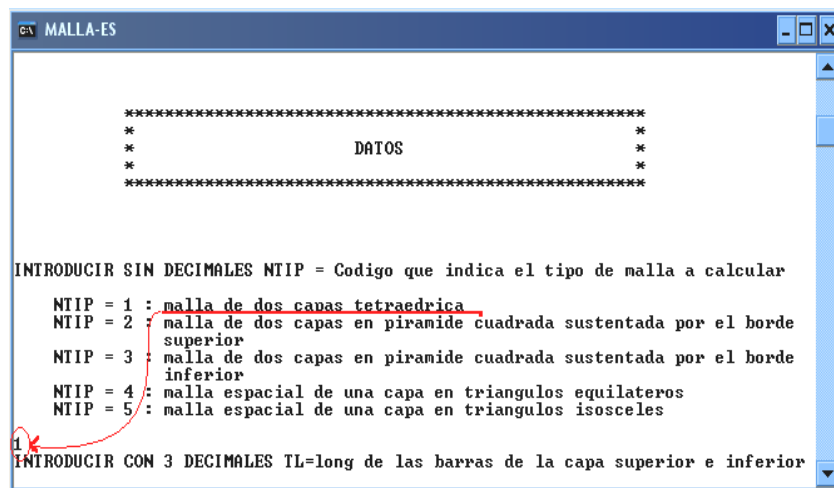
Ingresamos al programa de mallas espaciales el cual esta contenido en un archivo.



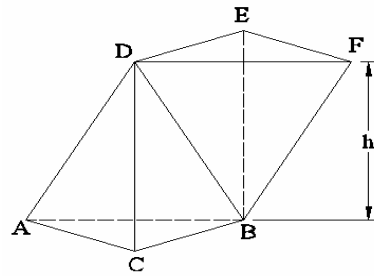
Desplegando la ventanilla de trabajo, siendo este un programa realizado en Fortran.



Siguiendo los pasos que indica el programa empezamos a introducir los datos, eligiendo el tipo de malla emplear en la solución del modelo.

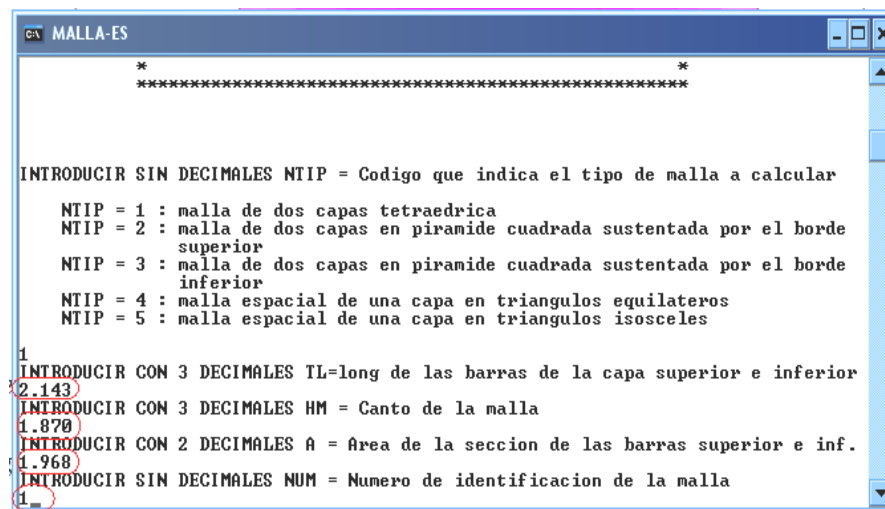


Malla tetraédrica.



$$AB = BC = CA = DE = EF = DF = l$$

Presionando **enter**, aparece los datos que el programa requiere:



Para el empleo del programa se necesita los siguientes esfuerzos, momentos y cortantes de la cúpula, para ello observaremos un punto de la cupula a analizar:

$$\text{Fuerza } \Gamma_{xx} = F_{11} = TN_1$$

$$\text{Fuerza } \Gamma_{yy} = F_{22} = TN_2$$

$$\text{Momento } \Gamma_{xx} = M_{11} = TM_1$$

$$\text{Momento } \Gamma_{yy} = M_{22} = TM_2$$

$$\text{Fuerza } \Gamma_{xy} = F_{12} = TN_{12}$$

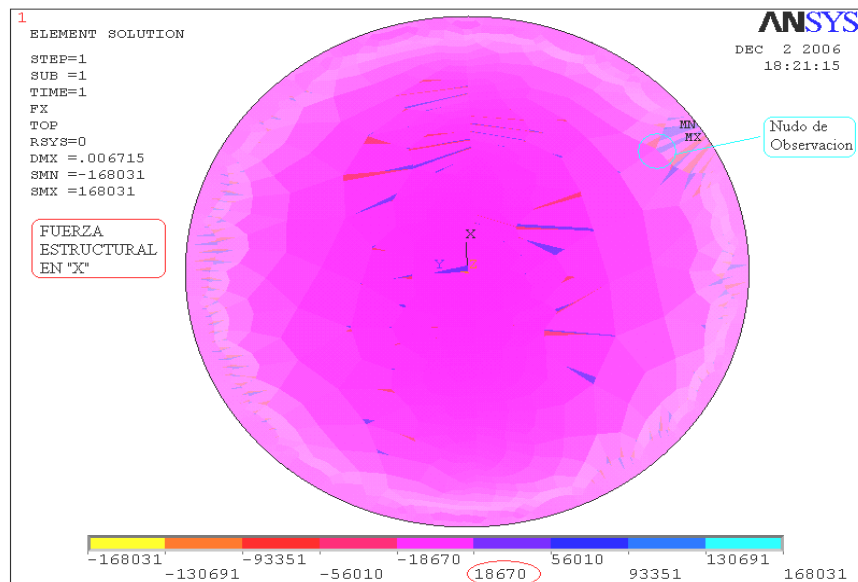
$$\text{Momento } \Gamma_{xy} = M_{12} = TM_{12}$$

$$\text{Cortante } \Gamma_{xz} = V_{13} = Q_1$$

$$\text{Cortante } \Gamma_{yz} = V_{23} = Q_2$$

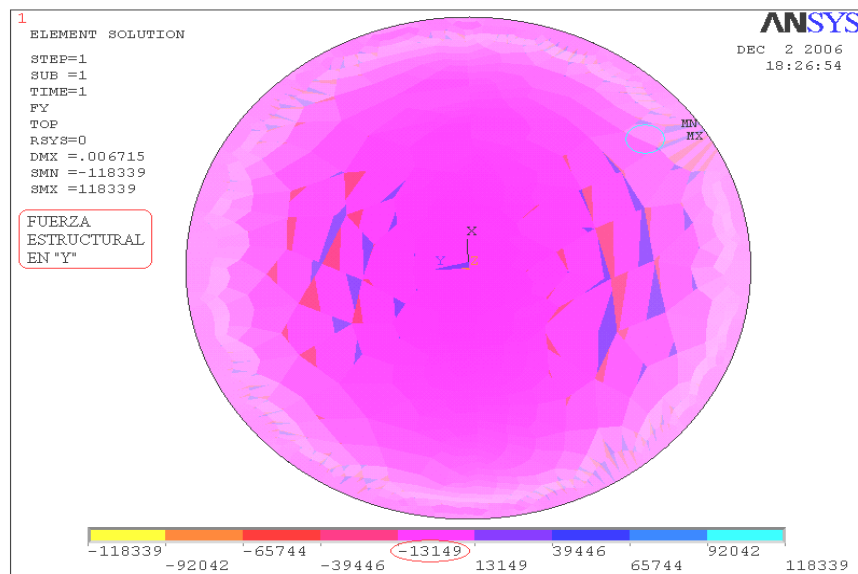
Para encontrar las fuerzas debemos mostrar General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Element Solu.

Eligiendo la componente de la fuerza en el eje “X”.



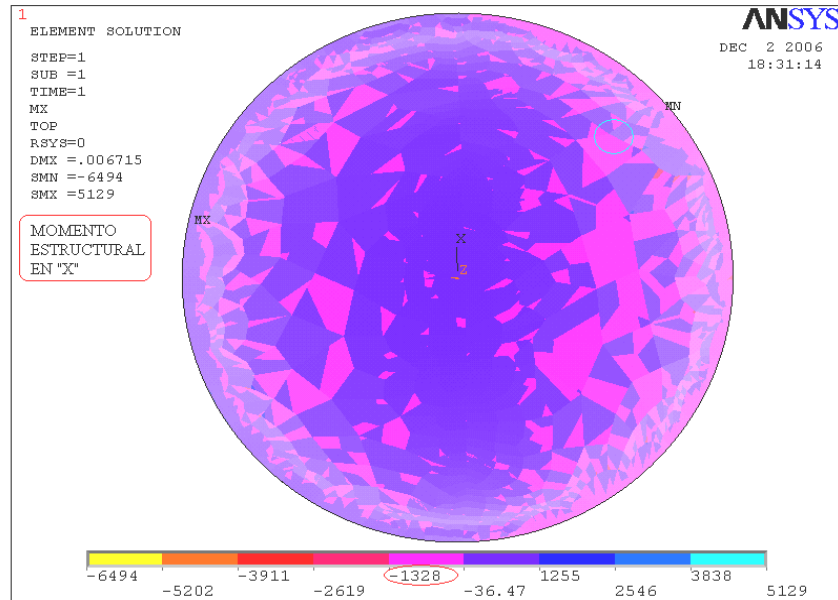
Fuerza $\Gamma_{xx} = F_{11} = TN_1 = 18670(N) = 1903.810(Kg)$ siendo la máxima fuerza presentada.

Eligiendo la componente de la fuerza en el eje “Y”.



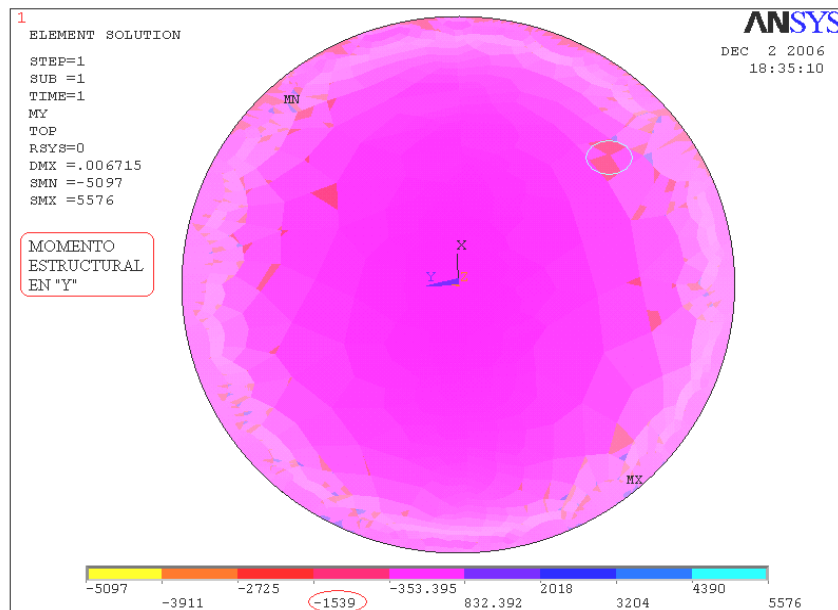
$$\text{Fuerza } \Gamma_{yy} = F_{22} = TN_2 = -13149(N) = -1340,824(kg)$$

Eligiendo la componente del momento en el eje “X”.



$$\text{Momento } \Gamma_{xx} = M_{11} = TM_1 = -1328(N.m^2) = -135,418(Kg.m)$$

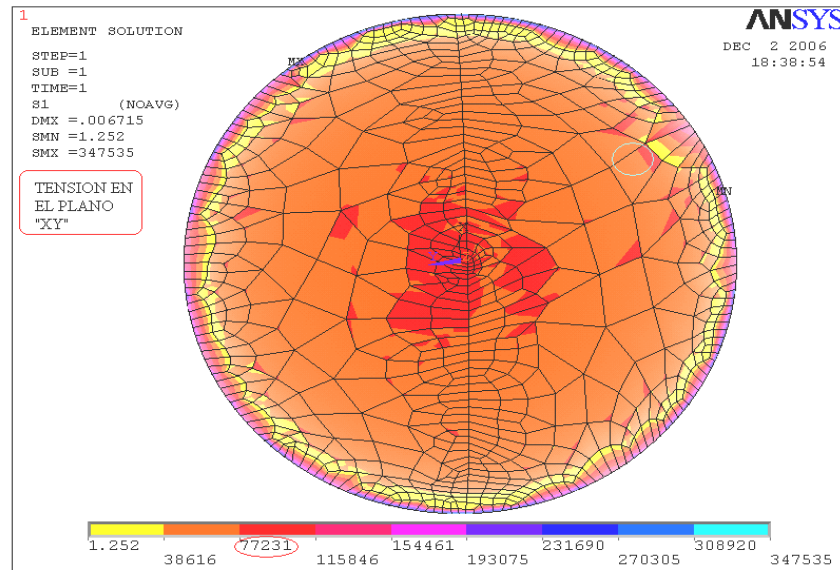
Eligiendo la componente del momento en el eje “Y”.



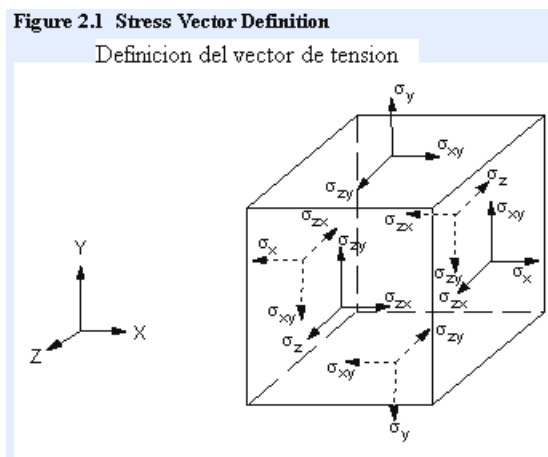
$$\text{Momento } \Gamma_{yy} = M_{22} = TM_2 = -1539(N.m) = -156,934(kg.m)$$

Eligiendo la tensión principal, el cual se da en el plano “XY”, del cual sacaremos la fuerza

$$\text{de dicho plano, } Tension = \frac{F}{A} = \frac{F_{xy}}{Area} ; \text{despejando } F_{xy} = \sigma_{xy} \times Area$$



Los resultados del análisis, aparecen de la siguiente forma en los diferentes planos:



Mostrandonos resultados, "EPTO" componente de las tensiones mecánicas totales de los diferentes planos (EPEL + EPPL + EPCR). Componente de las tensiones elásticas, componente de las tensiones plásticas y el componente de arrastre de las tensiones.

Prosiguiendo tenemos:

$$F_{xy} = \sigma_{xy} \times Area = 77231(Pa) \times Area(1m \times 1m) = \left[(77231(N/m^2) \times (1m \times 1m)) \right] / 9.80665N$$

$$TN_{12} = F_{xy} = 7875,370(kg)$$

Usaremos la misma tensión bajo el mismo concepto anterior para hallar el momento en dicho Plano.

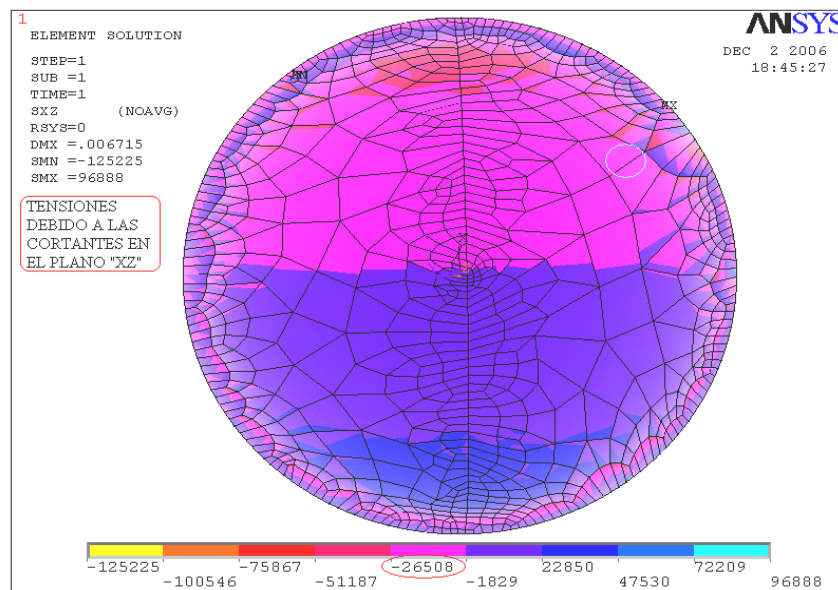
Momento $\Gamma_{xy} = M_{12} = TM_{12}$ Conociendo el espesor de la cúpula tenemos:

$$M_{12} = TM_{12} = F_{12} \times Brazo = F_{xy} \times 0,20m$$

$$M_{12} = TM_{12} = 7875,370 \times 0.20 = 1575,074(kg.m)$$

Ahora el en caso de las cortantes, tenemos que observar las tensiones debido a las cortantes, en los diferentes planos requeridos.

Eligiendo la componente de tensiones en el Plano “XZ” debido a las cortantes (Shear).

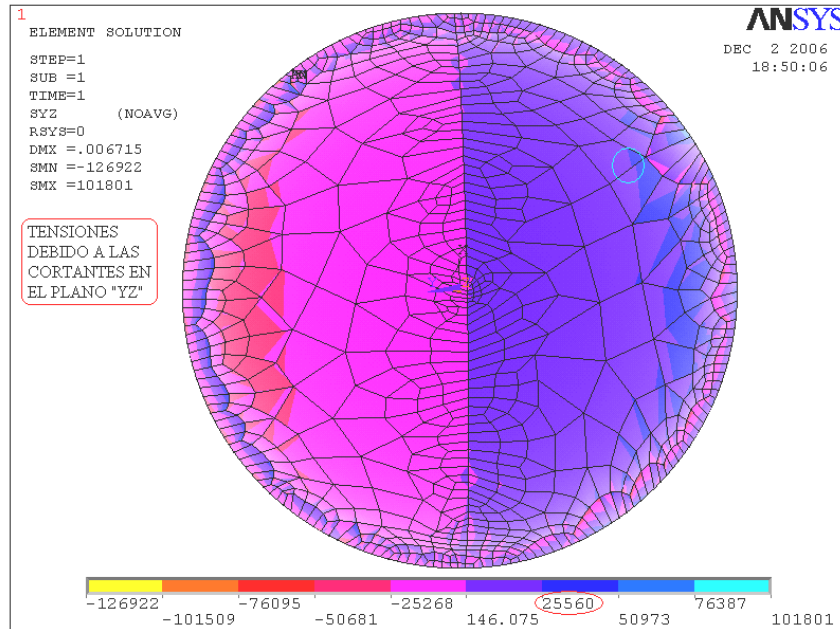


$$Cor\ tan\ te\ \Gamma_{xz} = V_{13} = Q_1 = \sigma_{xz} \times Area = 75800(Pa) \times Area(1m \times 1m)$$

$$Q_1 = \sigma_{xz} \times Area = -26508(Pa) \times Area(1m \times 1m)$$

$$V_{13} = Q_1 = -2703.063(Kg)$$

Eligiendo la componente de tensiones en el Plano “YZ” debido a las cortantes (Shear).



$$\text{Cortante } \Gamma_{yz} = V_{23} = Q_2 = 2606,394(kg)$$

Una vez teniendo los esfuerzos, continuamos con el empleo del programa mallas espaciales.

$$\text{Fuerza } \Gamma_{xx} = F_{11} = TN_1 = 1903,81(kg)$$

$$\text{Fuerza } \Gamma_{yy} = F_{22} = TN_2 = -1340,824(kg)$$

$$\text{Momento } \Gamma_{xx} = M_{11} = TM_1 = -135,418(kg \cdot m)$$

$$\text{Momento } \Gamma_{yy} = M_{22} = TM_2 = -156,934(kg \cdot m)$$

$$\text{Fuerza } \Gamma_{xy} = F_{12} = TN_{12} = 7875,370(kg)$$

$$\text{Momento } \Gamma_{xy} = M_{12} = TM_{12} = 1575,074(kg \cdot m)$$

$$\text{Cortante } \Gamma_{xz} = V_{13} = Q_1 = -2703,063(kg)$$

$$\text{Cortante } \Gamma_{yz} = V_{23} = Q_2 = 2606,394(kg)$$

Una vez hallado los esfuerzos de un nudo de la cupula; empezamos a introducir al programa mallas espaciales:

INTRODUCIR CON 3 DECIMALES S
 S = 1 : Punto central de la placa
 S = 2 y S = 3 : Puntos medios de los lados BL y AL
 S = 4 : Punto correspondiente a uno de los angulos de la placa
 3
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM1
 (4903.81)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM2
 (-1340.824)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM1
 (-135.418)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM2
 (-156.934)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES Q1
 (-2703.063)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES Q2
 (2606.394)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM12
 (7875.370)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES IM12
 (1575.074)

Presionando enter, continua:

2606.394
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES TM12
 (7875.370)
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES IM12
 (1575.074)

S	PAB	PBC	PCA	PDA	PDB	PDC	PDE	PEF	PDF
	.0032098	.890	*****9310.171	4555.083	*****6697.294	*****5907.80	2263.849		

 Valores de Traccion y Compresion en cada una de las barras de Acuerdo al tipo de Malla
INTRODUCIR CON 3 DECIMALES S
 S = 1 : Punto central de la placa
 S = 2 y S = 3 : Puntos medios de los lados BL y AL
 S = 4 : Punto correspondiente a uno de los angulos de la placa
 Presionando luego Enter.

Dándonos valores, eligiendo el tipo de uniones entre barras a elegir. El valor del peso de la malla por metro cuadrado del material, y todos los datos introducidos anteriormente:

S = 4 : Punto correspondiente a uno de los angulos de la placa
 PESO = .0081/M²
 MALLA 1 TIPO 1 HM= 1.870M. TL= 2.143 M.A= 1.97 CM²
 SI DESEA CONTINUAR PRESIONE "ENTER", CASO CONTRARIO PRESIONE "1.0"

Pudiendo así hallar el peso específico real del material.

$$\gamma_{MALLA} = 0.008(Tn / m^2) \div 0.20m = 40.00(kg / m^3)$$

Observando que no existan errores en el análisis, el objetivo de este proyecto es de entender el comportamiento de la cupula frente a las acciones del viento y sobrecargas; empleando el programa Mallas espaciales determinamos una solución de malla y hallamos todas los esfuerzos en las barras, peso real del Material; en el Ansys, cambiando valores obtenidos con mallas espaciales, hallando nuevos esfuerzos uno debe introducir esos nuevo valores al programa Mallas Espaciales. Siendo este un proceso iterativo hasta encontrar la solución al modelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 **PAZ, Mario** “Dinámica Estructural Teoría y Cálculo”, Barcelona, España, Editorial Reverte.
- 2 **BELLUZI, Odone** “Ciencia De La Construcción”, California, EEUU
- 3 **STTAMATO Smith** “Tall Building”, Mc Grau-Hill
- 4 **ALIENDRE, Vladimir** “Análisis del Sistema Estructural Dual Utilizando Muros de corte Rígidos, Comparando con el Sistema Estructural Aporticado, en el Diseño Sismo Resistente de Edificios de Hormigón Armado”, proyecto de grado para optar al título de Licenciado en Ingeniería Civil, Universidad Mayor de San Simón, Cochabamba, Bolivia.
- 5 **K.HAYASHI** “Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage”, Berlin, Springer, 1921.
- 6 **K.HAYASHI** “Sieben-und mehrstellige Tafeln der Kreis-und Hyperbelfunktionen”, Berlin, Springer, 1926.
- 7 **NILSON, Arthur H. y WINTER, George** “Diseño de estructuras de concreto ”, Mc Grau-Hill Interamericana S.A. Santa Fé de Bogotá, Colombia
- 8 **AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI) (2002)** “Reglamento para las construcciones de concreto estructural (ACI 318-02).
- 9 **LIAN Duan, Fai Waichen** “Hand Book of bridge Engeenering”, ACSCE publications, EEUU.
- 10 **AASHTO LRFD (2005)** “Bridge Guide Design, BGD AASHTO LRFD 05”, Guía de diseño de puentes, EEUU.
- 11 **G. UGURAL**, “Stresses in Plates and Shell”, 2da Edición, EEUU.
- 12 **S. THIMOSHENKO Woinosky Krieger** “Theory of Plates and Shells”, 2da Edicion McGraw-Hill, New York, N.Y.
- 13 **S. THIMOSHENKO** “Theory of Elasticity”, New York - Londres, McGraw-Hill, 1951.
- 14 **MARGARITE Buxade** “Mallas Espaciales en Arquitectura”, McGraw-Hill International Book Company.
- 15 **AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI 1995)** “Commentary (ACI 318R-95), American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich.