

Formulario Elettronica & Elettrotecnica

Indice generale

Matrici.....	2
Determinante.....	2
Operazioni.....	2
Somma.....	2
Prodotto.....	2
Matrice trasposta.....	2
Matrice inversa.....	3
Metodo di eliminazione di Gauss.....	3
Leggi di Kirchhoff.....	3
Grandezze circuito.....	4
Corrente I [A ampere].....	4
Generatori di corrente.....	4
Tensione E [V volt].....	4
Generatori di tensione.....	4
Potenza P [W watt].....	4
Resistenza [Ω ohm].....	5
Condensatore [F farad].....	5
Induttore [H henry].....	5
Convenzioni dei generatori e utilizzatori.....	6
Corto circuito e circuito aperto.....	6
Trasformazione stella-triangolo.....	6
Massimo trasferimento di potenza.....	6
Trasformazione Thevenin-Norton.....	7
Rappresentazione circuiti e metodo generale.....	7
Grafo.....	7
Metodo generale per la risoluzione di reti LTI.....	8
Metodi di analisi circuitale.....	8

Questo riassunto non è stato controllato da alcun professore.

Se vengono trovati errori, contattatemi e provvederò a correggere :)

by Flavio Primo

Matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

insieme di mxn numeri disposti su:

- m righe
- n colonne

Proprietà:

- **matrice nulla:** tutti elementi = 0
- **matrici stesso tipo:** stesso numero di righe e colonne
- **matrici uguali:** matrici stesso tipo e componenti corrispondenti identiche
- **diagonale principale:** elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
- **diagonale secondaria:** elementi $a_{n1}, a_{22}, \dots, a_{1n}$
- **elementi coniugati:** elementi a_{ik} e a_{ki} con $k \neq i$, simmetrici rispetto a diagonale principale

Determinante

matrice 2x2 $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$

matrice 3x3 $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$

Operazioni

Somma

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{bmatrix}$$

Proprietà:

- somma matrici solo se di stesso tipo
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativa)
- $A+B = B+A$ (commutativa)

somma elementi corrispondenti di A e B

Prodotto

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1} \cdot b_{1,1}) + (a_{1,2} \cdot b_{2,1}) & (a_{1,1} \cdot b_{1,2}) + (a_{1,2} \cdot b_{2,2}) \\ (a_{2,1} \cdot b_{1,1}) + (a_{2,2} \cdot b_{2,1}) & (a_{2,1} \cdot b_{1,2}) + (a_{2,2} \cdot b_{2,2}) \end{bmatrix}$$

Proprietà:

- prodotto matrici solo se $colonne_A = righe_B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa)

prodotto termini riga A con corrispondenti colonna B

Matrice trasposta

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \rightarrow A_T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

A_T matrice ottenuta da A trasformando ordinatamente le righe di A in colonne A_T .

Matrice inversa

Data una matrice quadrata A, ne calcolo $\det A$:

- $\det A = 0 \rightarrow$ non invertibile
- $\det A \neq 0 \rightarrow$ invertibile

1. Calcolo complemento algebrico elementi matrice, es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \text{Cof}(a_{11}) &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ \text{Cof}(a_{12}) &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$2. \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \text{Cof}(a_{1,1}) & \text{Cof}(a_{1,2}) & \cdots & \text{Cof}(a_{1,n}) \\ \text{Cof}(a_{2,1}) & & & \text{Cof}(a_{2,n}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \text{Cof}(a_{n,1}) & \text{Cof}(a_{n,2}) & \cdots & \text{Cof}(a_{n,n}) \end{bmatrix}^T$$

Inversa matrice 2x2: $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{bmatrix}$

Metodo di eliminazione di Gauss

Operazioni consentite su righe matrici:

- scambiare tra loro due equazioni
 - moltiplicare un'equazione per uno scalare ($\neq 0$)
 - sommare a un'equazione un'altra equazione
- } Sommare a un'equazione un multiplo di un'altra equazione

1. creo matrice completa sistema

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow A' = [A|b] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{bmatrix}$$

2. $A' = [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} & b'_1 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{bmatrix}$ sia $a_{11} \neq 0$ (eventualmente scambio due righe), moltiplicando la prima riga per $1/a_{11}$

3. $A' = [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} & b'_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & b'_2 \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} & b'_3 \end{bmatrix}$ per $i=2, \dots, m$, sommo a i-ma riga la prima riga moltiplicata per $-a_n$.
se ottengo $[0 \ 0 \ 0 | b]$ con $b \neq 0$, allora sistema è impossibile.

Ripeto per quante volte è necessario

4. risolvo il sistema a partire dall'ultima equazione

Leggi di Kirchhoff

Valide in regime stazionario (grandezze costanti rispetto al tempo).

1. Data **superficie chiusa**, la somma delle **correnti** entranti e uscenti è nulla $\sum I_i = 0$
2. Data **linea chiusa**, la somma delle sue **tensioni** (con segno in funzione del verso di percorrenza della maglia stessa) è pari a zero $\sum V_i = 0$

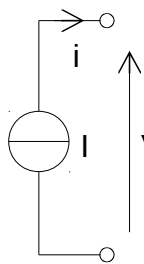
Grandezze circuito

Corrente I [A ampere]

Scorrimento delle cariche per unità di tempo in una sezione di conduttore. Elementi in serie possiedono la stessa corrente. In parallelo: $I_{eq} = \sum I$.

Generatori di corrente

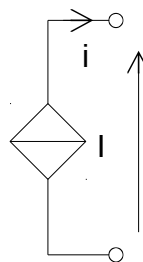
Impostano la corrente ai capi di un bipolo.



Gen di corrente

i conosciuta

V=?



Gen di corrente controllato

i determinata da altre grandezze del circuito: tensione (gen corrente controllato in tensione) o corrente (gen corrente controllato in corrente).

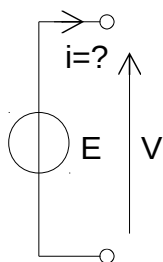
V=?

Tensione E [V volt]

Esprime differenza di potenziale tra 2 punti. Indica quanta energia può sprigionare un bipolo. Elementi in parallelo possiedono la stessa tensione. In serie: $E_{eq} = \sum E$.

Generatori di tensione

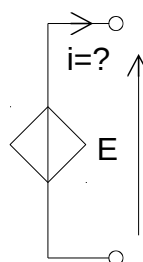
Impostano la tensione ai capi di un bipolo.



Gen di tensione

V conosciuta

i=?



Gen di tensione controllato

V determinata da altre grandezze del circuito: tensione (gen tensione controllato in tensione) o corrente (gen tensione controllato in corrente).

i=?

Potenza P [W watt]

Energia emessa o assorbita da bipolo $P = V \cdot I$

$$\bar{P} = \frac{\bar{V} \cdot \bar{I}^*}{2} = \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cdot e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \underbrace{\frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)}_{\substack{\text{P attiva [W]} \\ P_a}} + \underbrace{\frac{V_M I_M}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I)}_{\substack{\text{P reattiva [VAR]} \\ Q}}$$

P resistore	$\bar{P}_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{ \bar{V} ^2}{R}$	$\bar{P}_R = \bar{P}_R + j0$
P condensatore	$\bar{P}_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{ \bar{I} ^2}{j\omega C} = -\frac{j}{2} \cdot \frac{ \bar{I} ^2}{\omega C}$	$\bar{P}_C = 0 + jQ_C$
P induttore	$\bar{P}_L = \frac{1}{2} \cdot j\omega L \cdot \bar{I} ^2$	$\bar{P}_L = 0 + jQ_L$

Resistenza [Ω ohm]



Misura la tendenza di un corpo ad opporsi al passaggio di una corrente elettrica, quando sottoposto ad una tensione elettrica.

Legge di Ohm: $R = \frac{V}{I}$

Proprietà

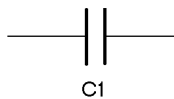
Serie e parallelo

serie: $R_{eq} = \sum R$

parallelo: $R_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R}} = \frac{\prod R}{\sum R}$

Impedenza $\dot{z} = R$

Condensatore [F farad]



Dispositivo dinamico (ha memoria), può accumulare e scaricare carica elettrica.

Proprietà

Serie e parallelo

serie: $C_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{C}} = \frac{\prod C}{\sum C}$

parallelo: $C_{eq} = \sum C$

Impedenza $\dot{z} = \frac{1}{j\omega C}$

Anticipo rispetto a tensione $\varphi_I = \varphi_V + \frac{\pi}{2}$

Trasparente a Potenza Assorbe solo potenze reattiva

Induttore [H henry]



Assorbe energia generando un campo magnetico al passaggio di corrente elettrica.

Proprietà

Serie e parallelo

serie: $L_{eq} = \sum L$

parallelo: $L_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{L}} = \frac{\prod L}{\sum L}$

Impedenza

$$\dot{z} = j \omega L$$

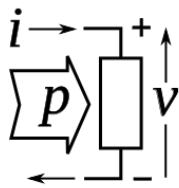
Anticipo rispetto a corrente

$$\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$$

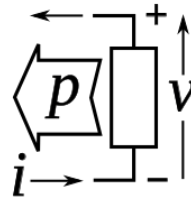
Trasparente a Potenza

Assorbe solo potenze reattiva

Convenzioni dei generatori e utilizzatori



Convenzione
utilizzatori
corrente e tensione
discordi

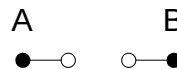


Convenzione
generatori
corrente e tensione
concordi

Corto circuito e circuito aperto

Corto circuito

$$V=0, I=?, P=0$$

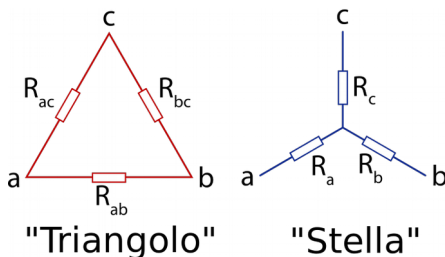


Circuito aperto

$$V=?, I=0, P=0$$



Trasformazione stella-triangolo



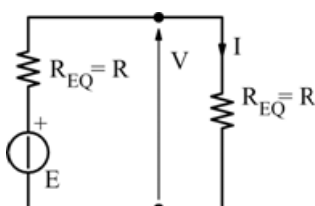
triangolo \rightarrow stella

stella \rightarrow triangolo

$$\begin{cases} R_{bc} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a} \\ R_{ac} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b} \\ R_{ab} = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_a = \frac{G_{bc}}{G_{ab} G_{ac} + G_{ab} G_{bc} + G_{ab} G_{bc}} \\ R_b = \frac{G_{ac}}{G_{ab} G_{ac} + G_{ab} G_{bc} + G_{ab} G_{bc}} \\ R_c = \frac{G_{ab}}{G_{ab} G_{ac} + G_{ab} G_{bc} + G_{ab} G_{bc}} \end{cases}$$

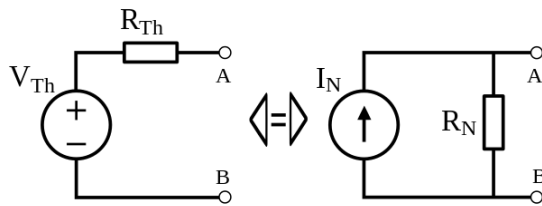
Massimo trasferimento di potenza



Permette di calcolare la massima potenza trasferibile al carico R.

$$P_{max} = V \cdot I = R \cdot I^2 = R \cdot \left(\frac{E}{2R} \right)^2 = \frac{E^2}{4R}$$

Trasformazione Thevenin-Norton



Thevenin

$$\begin{cases} V_{Th} = R_N \cdot I_N \\ R_{Th} = R_N \end{cases}$$

Norton

$$\begin{cases} I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \\ R_N = R_{Th} \end{cases}$$

Equivalente Thevenin di un circuito:

- V_{Th} : Calcolo tensione ai capi dei morsetti con analisi nodale o ad anelli (resistori ai capi dei morsetti non considerati poiché non vi passa corrente).
- R_{Th} : Spongo generatori indipendenti del circuito (gen tensione \rightarrow corto circuito, gen corrente \rightarrow circuito aperto) e calcolo $R_{eq} = R_{Th}$.

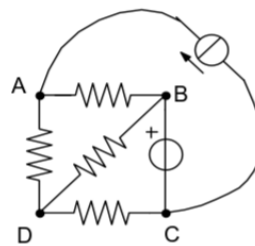
Se in presenza di generatori controllati, aggiungo (dopo aver svolto le azioni sopra riportate) un generatore di corrente/tensione con grandezza di convenienza (es: $i=1A$) e risolvo il circuito con analisi nodale o ad anelli. R_{Th} la calcolo con la legge di Ohm rispetto alla grandezze trovate.

Rappresentazione circuiti e metodo generale

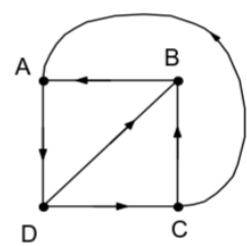
Grafo

Circuito rappresentabile tramite grafo.

Grafo, ciò che si ottiene dal circuito sostituendo ciascun elemento con un segmento, in seguito viene orientato in modo arbitrario (verso individua tensione e corrente sul circuito seguendo la convenzione utilizzata).



Circuito



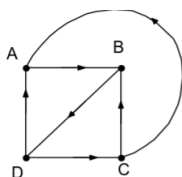
Grafo circuito

Componenti grafo:

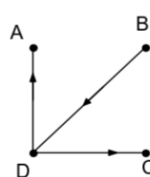
- **Lato**, singolo percorso circuitale (tra 2 nodi)
- **Nodo**, punto del grafo in cui convergono almeno 3 lati

Operazioni su grafo:

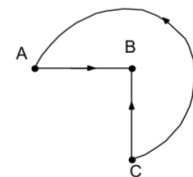
- **Albero**, insieme di lati che collegano tutti i nodi senza compiere percorsi chiusi
ramo: lato dell'albero
- **Coalbero**, insieme di lati che completano albero
corda: lato del coalbero



Albero

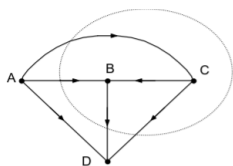


Coalbero

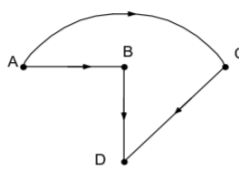


- **Taglio**, insieme di lati intersecati da una sola linea sul grafo

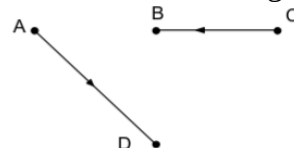
fondamentale: se taglio comprende un ramo e il resto corde $n_{\text{tagli fondamentali}} = n_{\text{rami}} = n_{\text{nodi}} - 1$



Taglio



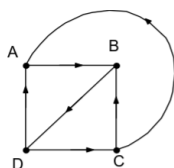
Lati lasciati fuori dal taglio



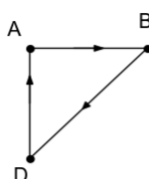
- **Maglia**, insieme di lati di un angolo ottenibile attraverso un percorso chiuso

fondamentale: se maglia comprende una corda e il resto rami

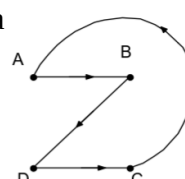
$$n_{\text{maglie fondamentali}} = n_{\text{corde}} = n_{\text{lati}} - (n_{\text{nodi}} - 1)$$



Es maglia



Es maglia



Metodo generale per la risoluzione di reti LTI

1. disegno grafo circuito (individuo i nodi e pongo versi arbitrari alle frecce)
2. identifico albero e coalbero
3. applico tagli e maglie fondamentali
4. nomino le correnti dei lati del grafo
5. applico 1°PdK a tagli fondamentali e 2°PdK a maglie fondamentali
6. risolvo sistema di equazioni trovato

$$\left\{ \begin{array}{l} [f(i)] = [v] \\ [g(v)] = [i] \end{array} \right\} \text{ Leggi costitutive bipoli (L equazioni)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{PdK} \\ 2^\circ \text{PdK} \end{array} \right\} \text{ Principi di Kirchhoff (L equazioni)}$$

Metodi di analisi circuitale

Analisi nodi

1. Individuo nodi circuito e ne pongo arbitrariamente uno di saldo.
2. Trasformo generatori in equivalenti Norton (se possibile)
3. Compongo matrici circuito

$$G = \begin{bmatrix} g_{A,A} & g_{A,B} & \cdots & g_{A,n-1} \\ g_{B,A} & & & g_{B,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n-1,A} & g_{n-1,B} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Matrice conduttanze

- Autoconduttanze $a_{i,i} = \sum G_{\text{convergenti a nodo } i}$
- Transconduttanze, $i \neq j, a_{i,j} = -\sum G_{\text{transito da nodo } i \text{ a nodo } j}$

$N_{\text{equazioni conduttanze}} = n_{\text{nodi}} - 1$

$$V = \begin{bmatrix} V_A \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} b_A \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

4. Risolvo sistema di equazioni $[G] \cdot [V] = [I]$

Matrice tensioni nodali (incognite)

se ho incognite aggiuntive posso ottenere equazioni di vincolo come differenza di potenziale tra 2 nodi e sostituirla (riordinando poi il sistema), es: se tra nodi A e B c'è un generatore di tensione E ricavo

$$V_A - V_B = E \Rightarrow V_A = E + V_B$$

Matrice correnti nodali

$$b_i = \sum I_{\text{entrant nel nodo } i} - \sum I_{\text{uscenti dal nodo } i}$$

Analisi anelli

1. Individuo maglie circuito.
2. Trasformo generatori in equivalenti Thevenin (se possibile)
3. Compongo matrici circuito

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n-1} \\ r_{2,1} & & & r_{2,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \cdots & r_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

4. Risolvo sistema di equazioni $[R] \cdot [I] = [V]$

Matrice resistenze

Autoresistenze $a_{i,i} = \sum R_{\text{convergenti a nodo } i}$

Transresistenze, $i \neq j, a_{i,j} = - \sum R_{\text{tra nodo } i \text{ e nodo } j}$

$$N_{\text{equazioni resistenze}} = n_{\text{maglie}} - 1$$

Matrice correnti di maglia (incognite)

se ho incognite aggiuntive posso ottenere equazioni di vincolo come differenza di potenziale tra 2 nodi e sostituirla (riordinando poi il sistema), es: se tra maglie 1 e 2 c'è un generatore di corrente I ricavo

$$i_1 - i_2 = I \Rightarrow i_1 = I + i_2$$

Matrice tensioni di maglia

$$b_i = \sum E_{\text{verso concorde a i maglia}} - \sum E_{\text{verso discorde a i maglia}}$$